1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 3 : solutions
Répétitions 5(en partie), 6

Version 4 mars 2010 (V1 : 02/03/2010)

Exercices

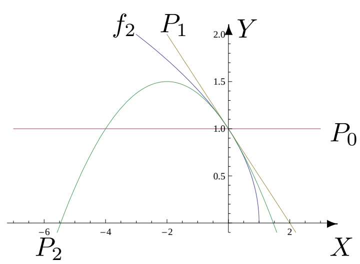
1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.**

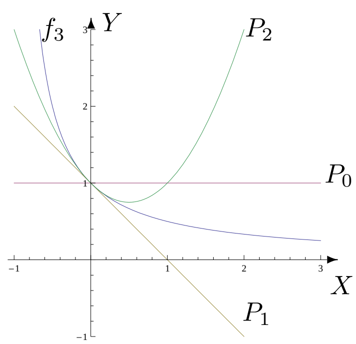
$$f_1(x) = \cos x\ e^x,\ x_0 = 0, n = 0,1,2,3 \qquad f_2(x) = \sqrt{1-x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2$$
$$f_3(x) = \frac{1}{1+x},\ x_0 = 0, n = 0,1,2 \qquad f_4(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 0, n = 0,1,2$$
$$f_5(x) = \cos^2 x,\ x_0 = 0,\ n = 0,1,2 \qquad f_6(x) = \cos x,\ x_0 = 1, n = 0,1,2$$

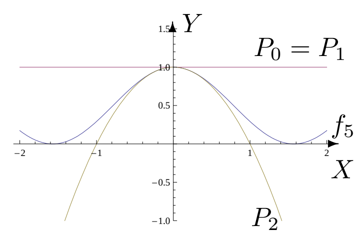
Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	1	$1+x$	$1+x,\ x \in \mathbb{R}$
f_2	1	$1-\frac{x}{2}$	$1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8},\ x \in]-\infty, 1[$
f_3	1	$1-x$	$1-x+x^2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
f_4	0	x	$x,\ x \in \mathbb{R}$
f_5	1	1	$1-x^2,\ x \in \mathbb{R}$
f_6	$\cos(1)$	$\cos(1)-\sin(1)(x-1)$	$\cos(1)-\sin(1)(x-1)-\cos(1)\frac{(x-1)^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$

L'approximation à l'ordre 3 en 0 de f_1 est donnée par $P(x) = 1 + x - \frac{x^3}{3},\ x \in \mathbb{R}$.

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.



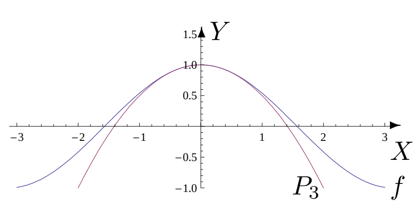




2. **a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cos et estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.**

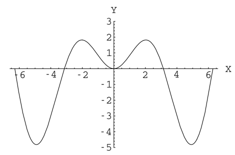
L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est $P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut

$R_3(x) = \frac{\cos(u)}{4!}x^4,\ x \in \mathbb{R}$ avec u strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_3(x)| \leq \frac{x^4}{24}$.

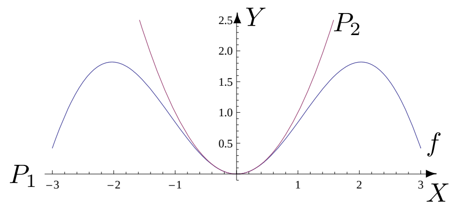


b) (*) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = x \sin x,\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.

(Suggestion : $|\sin x| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$.)



Les approximations polynomiales en 0 à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de la fonction f sont respectivement $P_1(x) = 0$ et $P_2(x) = x^2, \ x \in \mathbb{R}$.
Au voisinage de zéro, le graphique de f est en dessous de celui de P_2.



3. **(**) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données par**[1]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right), \quad g_2(x) = \frac{-3x+2}{2x^2-3x+1}.$$

Pour g_1, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = 0, \ P_1(x) = 2x, \ P_2(x) = 2x, \ P_3(x) = 2x + \frac{2x^3}{3}, \ x \in]-1, 1[.$$

Pour g_2, les approximations polynomiales à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 sont respectivement

$$P_0(x) = 2, \ P_1(x) = 2 + 3x, \ P_2(x) = 2 + 3x + 5x^2, \ P_3(x) = 2 + 3x + 5x^2 + 9x^3, \ x \in \,]-\infty, \frac{1}{2}[.$$

4. **(**) Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel.**

L'approximation de la profondeur maximale de ce tunnel vaut $\dfrac{l^2}{8R}$.

[1] *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1 + x)$ et $\ln(1 - x)$; décomposer en fractions simples