Liste d'exercices types pour révisions : correction

Calcul matriciel

1. **Soient les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 1 \\ 0 & -i^2 & -3 \\ -1 & 0 & \frac{2}{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & i & 7 \end{pmatrix}$$

Calculer (si possible) $iC, CB, B^*A, C\tilde{A}$**.**

On ne peut pas calculer $C\tilde{A}$ car le nombre de colonnes (3) de C est différent du nombre de lignes (1) de $\tilde{A}$. Sinon on a

$$iC = \begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ -i & -1 & 7i \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 2-2i & 5 & -1 \\ -8+i & -2+i & -1-17i \end{pmatrix}, \quad B^*A = \begin{pmatrix} 3+i \\ 1+2i \\ -3-7i \end{pmatrix}$$

2. **Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes**

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ i^3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Les matrices inverses de la première et de la dernière matrice donnée sont respectivement les matrices

$$\begin{pmatrix} -2/3 & i/3 \\ -i/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

La deuxième matrice n'admet pas d'inverse car son déterminant est nul.

3. **Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la première matrice sont 1 et 4 : cette matrice de dimension 2 possédant 2 valeurs propres distinctes est donc diagonalisable et on a, par exemple,

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si on note A la première matrice donnée.

Les valeurs propres de la deuxième matrice sont 0 et 2 : cette matrice de dimension 2 possédant 2 valeurs propres distinctes est donc diagonalisable et on a, par exemple,

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si on note B la deuxième matrice donnée.

Les valeurs propres de la troisième matrice sont 7 et -2. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 7 sont

$$c\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+c'\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

avec $c,\ c' \in \mathbb{C}$ non simultanément nuls et les vecteurs propres relatifs à la valeur propre -2 sont

$$c\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$$

avec $c \in \mathbb{C}_0$. La matrice est donc diagonalisable et on a, par exemple,

$$S^{-1}CS=\begin{pmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix}1&0&-2\\2&-2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

si on note C la troisième matrice donnée.

Approximations polynomiales

1. **Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation à l'ordre n en x_0 de la fonction f_k. Représenter f_1, f_2 et leurs approximations.**

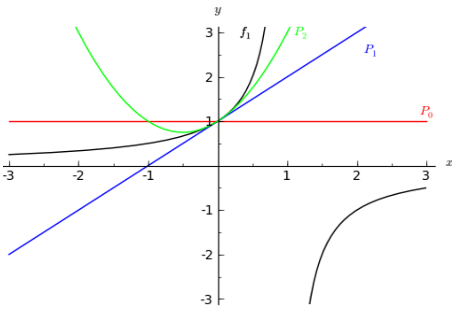
$f_1(x) = \frac{1}{1-x},\ n = 0, 1, 2,\ x_0 = 0$

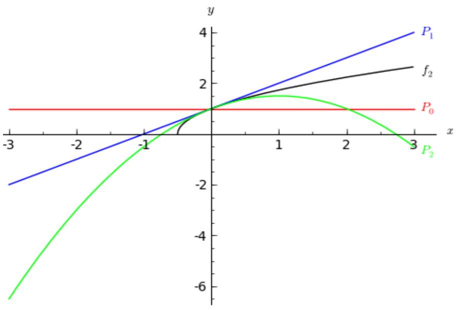
$f_2(x) = \sqrt{1+2x},\ n = 0, 1, 2,\ x_0 = 0$

$f_3(x) = |\sin(x)|\,,\ n = 0, 1, 2,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$

Fonction	Ordre 0	Ordre 1	Ordre 2
f_1	$1,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	$1+x,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$	$1+x+x^2,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
f_2	$1,\ x \in]\frac{-1}{2}, +\infty[$	$1+x,\ x \in]\frac{-1}{2}, +\infty[$	$1+x-\frac{x^2}{2},\ x \in]\frac{-1}{2}, +\infty[$
f_3	$1,\ x \in]0,\pi[$	$1,\ x \in]0,\pi[$	$1-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{2})^2,\ x \in]0,\pi[$

Dans les graphiques suivants, notons P_i l'approximation polynomiale à l'ordre i.



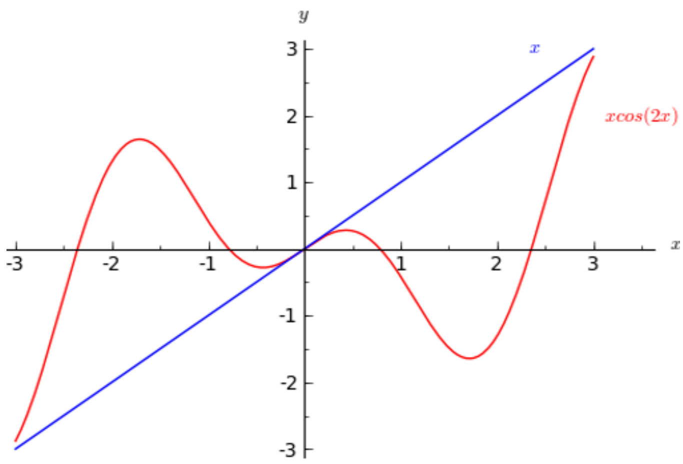


2. **a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction $f\ :\ x \mapsto \sin(2x)$ et en estimer le reste.**

L'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 est $P_3(x) = 2x - \frac{4x^3}{3}$, $x \in \mathbb{R}$ et le reste vaut $R_3(x) = \frac{16\sin(2u)}{4!}x^4$, $x \in \mathbb{R}$ avec u strictement compris entre 0 et x. Dès lors, on a $|R_3(x)| \leq \frac{2x^4}{3}$.

b) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = x\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cfr ci-dessous) en justifiant les positions relatives des courbes.

Les approximations polynomiales en 0 à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de la fonction f sont $P_1(x) = x = P_2(x)$



y
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3
x
x
xcos(2x)