**Révisions relatives aux fonctions de plusieurs variables : solutions**

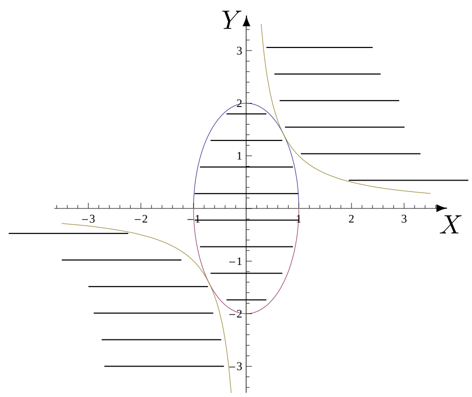
---

1. **Soit** $f : (x,y) \mapsto \ln\left(\dfrac{xy-1}{4x^2+y^2-4}\right)$.

   **a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de cette fonction et les représenter dans un repère orthonormé en les hachurant.**
   **b) Déterminer la dérivée de $f$ par rapport à sa seconde variable en un point de son domaine de dérivabilité.**

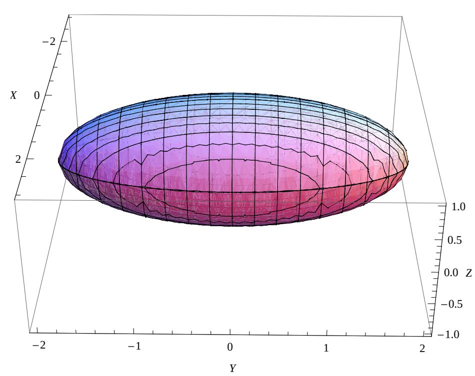
   a) Les deux domaines sont égaux à $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{xy-1}{4x^2+y^2-4} > 0,\ 4x^2+y^2-4 \neq 0\}$.

   Les points de l'hyperbole et ceux de l'ellipse ne font pas partie de l'ensemble.




   b) On a $D_y f(x,y) = \dfrac{(2x-y)(2x^2+xy-2)}{(xy-1)(4x^2+y^2-4)}$

2. **Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter la surface d'équation** $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$.



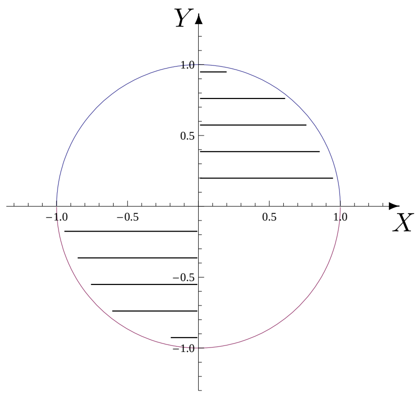

3. **Soit** $f : (x,y) \mapsto \mathrm{arctg}(2x+y)$.
   **a) Déterminer son domaine de dérivabilité.**
   **b) Si c'est possible, calculer, par application de la définition de la dérivée d'une fonction en un point, la dérivée partielle de $f$ par rapport à sa première variable au point de coordonnées $(1,3)$.**

   a) Le domaine de dérivabilité de $f$ est $\mathbb{R}^2$.
   b) La dérivée partielle de $f$ par rapport à sa première variable au point de coordonnées $(1,3)$ est donnée par
   $$D_x f(1,3) = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{arctg}(2x+3) - \mathrm{arctg}(5)}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{arctg}(2(1+h)+3) - \mathrm{arctg}(5)}{h} = \frac{1}{13}.$$

4. **Soit $f$ une fonction de deux variables réelles continûment dérivable sur** $]-1,1[\times]0,+\infty[$.
   **On considère la fonction** $F : (x,y) \mapsto f(x^2+y^2, xy)$.

**a) Où la fonction $F$ est-elle dérivable ? Donner une représentation graphique de l'ensemble.**
**b) En un point de son domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée partielle de $F$ par rapport à sa seconde variable en fonction des dérivées partielles de $f$.**

a) La fonction $F$ est dérivable sur $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ xy > 0\}$ dont voici la représentation graphique, les points des "bords" ne faisant pas partie de $A$.




b) La dérivée partielle de $F$ par rapport à sa seconde variable vaut

$$D_y F(x, y) = (D_u f)(u, v).2y + (D_v f)(u, v).x \quad \text{avec} \quad (u, v) = (x^2 + y^2, xy).$$

5. **Soit $f$ une fonction de deux variables réelles continûment dérivable sur $]\frac{1}{2}, 2[\times] - 1, +\infty[$.**
**On considère la fonction $F : t \mapsto f(\cos^2(t), \ln(t))$.**
**a) Où la fonction $F$ est-elle dérivable ?**
**b) En un point de son domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée de $F$ en fonction des dérivées partielles de $f$.**

a) La fonction $F$ est dérivable sur

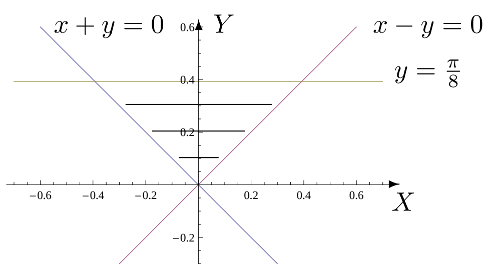
$$A = \left]\frac{1}{e}, \frac{\pi}{4}\right[ \cup \left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left]\frac{3\pi}{4} + k\pi, \frac{5\pi}{4} + k\pi\right[ \right).$$

b) La dérivée de $F$ vaut

$$DF(t) = -(D_u f)(u, v)\sin(2t) + (D_v f)(u, v).\frac{1}{t} \quad \text{avec} \quad (u, v) = (\cos^2(t), \ln(t)).$$

6. **Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble**
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0,\ x - y \leq 0,\ y \leq \tfrac{\pi}{8}\}.$$
**a) Donner une représentation graphique de $A$ en le hachurant.**
**b) Si c'est possible, calculer $I = \displaystyle\int\int_A \frac{1}{\cos^2(x + y)}\, dx\, dy$**

a) Voici la représentation graphique de $A$, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble

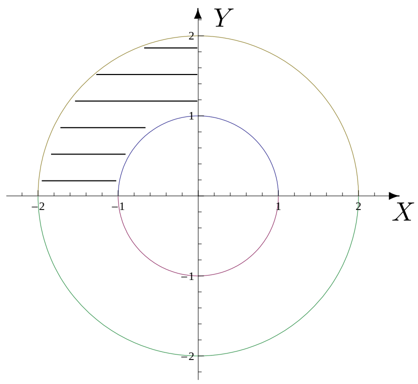



b) La fonction $f$ est continue sur un ensemble fermé borné donc intégrable sur cet ensemble et on a $I = \frac{1}{4}\ln 2$

7. **Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble**
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$$
**a) Donner une représentation graphique de $A$ en le hachurant.**

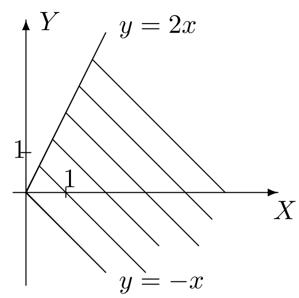
**b) Si c'est possible, calculer** $I = \int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\ dx\ dy$

a) Voici la représentation graphique de $A$, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble




b) La fonction $f$ est continue sur un ensemble fermé borné donc intégrable sur cet ensemble. L'intégrale se calcule simplement par passage aux coordonnées polaires et on a $I = \frac{7\pi}{6}$.

8. **On donne la partie du plan hachurée ci-dessous (ensemble fermé non borné), notée $A$, et la fonction $f : (x,y) \mapsto e^{-x^2}$. Si c'est possible, calculer $I = \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$.**

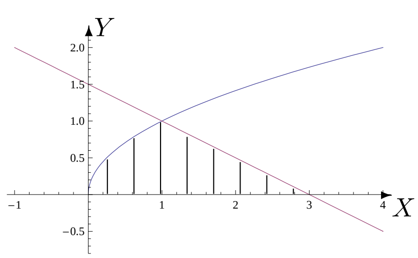



On montre que la fonction $f$, continue sur $A$, est intégrable sur $A$ et l'intégrale $I$ vaut $\frac{3}{2}$.

9. **Permuter les intégrales et représenter graphiquement l'ensemble d'intégration si**

$$I = \int_0^1 \left( \int_{y^2}^{3-2y} f(x,y)\ dx \right) dy.$$

La représentation graphique de l'ensemble d'intégration est la suivante




En permutant l'ordre d'intégration, on a

$$I = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\ dy \right) dx + \int_1^3 \left( \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\ dy \right) dx$$