1, 2, 3... Sciences

Année académique 2009-2010

Mathématiques générales B 2009-2010 : Test 1 (Chimie)

1. **On donne une fonction F continûment dérivable sur $]\frac{1}{2},2[\times]0,3[$ et on définit $f(t)=F(\sin(t),2t)$. Déterminer le domaine de dérivabilité de f.**

   Solution. Soient $f_1 : t \mapsto \sin(t)$ et $f_2 : t \mapsto 2t$. Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme F est continûment dérivable sur $]\frac{1}{2},2[\times]0,3[$, on doit avoir $\sin(t)\in\,]\frac{1}{2},2[$ et $2t\in\,]0,3[$ c'est-à-dire

   $$t\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right[\quad\text{et}\quad t\in\left]0,\frac{3}{2}\right[.$$

   Dès lors, $t\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right[$; cet intervalle est le domaine de dérivabilité de f.

2. **Soit** $G(x,y,z)=F(u(x,y,z),w(x,y,z))$ **où**

   $$u(-1,0,1)=2\quad(D_xu)(-1,0,1)=-1\quad(D_yu)(-1,0,1)=-2\quad(D_zu)(-1,0,1)=3$$

   $$w(-1,0,1)=-3\quad(D_xw)(-1,0,1)=4\quad(D_yw)(-1,0,1)=-5\quad(D_zw)(-1,0,1)=\frac{1}{2}$$

   $$(D_uF)(2,-3)=\frac{1}{3}\quad\textbf{et}\quad(D_wF)(2,-3)=1$$

   En supposant G dérivable en ce point, que vaut $(D_yG)(-1,0,1)$?

   Solution. Comme $u(-1,0,1)=2$ et $w(-1,0,1)=-3$, on a

   $$D_yG(-1,0,1)=(D_uF)(2,-3)(D_yu)(-1,0,1)+(D_wF)(2,-3)(D_yw)(-1,0,1)=\frac{1}{3}.(-2)+1.(-5)=-\frac{17}{3}.$$

Mathématiques générales B   2009-2010 : Test 1 (Géographie)

1. **On donne une fonction F continûment dérivable sur $]0,\frac{\pi}{3}[\times]-1,1[$ et on définit $f(t) = F(\arcsin(t), 2t)$.**
   Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

   Solution. Soient $f_1 : t \mapsto \arcsin(t)$ et $f_2 : t \mapsto 2t$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $]-1,1[$. Comme F est continûment dérivable sur $]0,\frac{\pi}{3}[\times]-1,1[$, on doit avoir $\arcsin(t) \in]0,\frac{\pi}{3}[$ et $2t \in]-1,1[$ c'est-à-dire

   $$t \in \left]0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[\quad \text{et} \quad t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

   Dès lors, $t \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$; cet intervalle est le domaine de dérivabilité de f.

2. **Soit $G(x,y) = F(u(x,y), v(x,y), w(x,y))$ où**

   $$u(-1,0) = 2 \quad (D_xu)(-1,0) = -1 \quad (D_yu)(-1,0) = \frac{-3}{2}$$
   $$v(-1,0) = 1 \quad (D_xv)(-1,0) = \frac{-1}{2} \quad (D_yv)(-1,0) = -2$$
   $$w(-1,0) = -3 \quad (D_xw)(-1,0) = 4 \quad (D_yw)(-1,0) = -5$$
   $$(D_uF)(2,1,-3) = \frac{1}{3} \quad (D_vF)(2,1,-3) = \frac{1}{2} \quad \textbf{et } (D_wF)(2,1,-3) = \frac{3}{2}$$

   En supposant G dérivable en ce point, que vaut $(D_yG)(-1,0)$?

   Solution. Comme $u(-1,0) = 2$, $v(-1,0) = 1$ et $w(-1,0) = -3$, on a

   $$\begin{aligned} D_yG(-1,0) &= (D_uF)(2,1,-3)(D_yu)(-1,0) + (D_vF)(2,1,-3)(D_yv)(-1,0) + (D_wF)(2,1,-3)(D_yw)(-1,0) \\ &= \frac{1}{3}.\left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{1}{2}.(-2) + \frac{3}{2}.(-5) = -9. \end{aligned}$$

Mathématiques générales B   2009-2010 : Test 1 (Biologie, Géologie, Physique et Informatique)

On donne une fonction F continûment dérivable sur $]0,2[\times]-4,4[$ et on définit $f(t) = F\left(\frac{2t}{t+1}, t^2\right)$.
a) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.
b) Là où elle est définie, déterminer la dérivée première de f.

Solution. a) Soient $f_1 : t \mapsto \dfrac{2t}{t+1}$ et $f_2 : t \mapsto t^2$. Ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Comme F est continûment dérivable sur $]0,2[\times]-4,4[$, on doit avoir $\dfrac{2t}{t+1} \in]0,2[$ et $t^2 \in]-4,4[$.
L'inéquation $\dfrac{2t}{t+1} > 0$ a pour ensemble de solution $S_1 =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$.
L'inéquation $\dfrac{2t}{t+1} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{t+1} < 0$ a pour ensemble de solution $S_2 =]-1,+\infty[$. Dès lors, la première condition est satisfaite pour $t \in]0,+\infty[$. Comme la deuxième condition est satisfaite pour $t \in]-2,2[$, on a $t \in]0,2[$; cet intervalle est le domaine de dérivabilité de f.

b) Comme $D\left(\dfrac{2t}{t+1}\right) = \dfrac{2t+2-2t}{(t+1)^2} = \dfrac{2}{(t+1)^2}$ et $D(t^2) = 2t$, on a

$$Df(t) = (D_xF)\left(\frac{2t}{t+1}, t^2\right) D\left(\frac{2t}{t+1}\right) + (D_yF)\left(\frac{2t}{t+1}, t^2\right) D(t^2) = (D_xF)\left(\frac{2t}{t+1}, t^2\right) \frac{2}{(t+1)^2} + (D_yF)\left(\frac{2t}{t+1}, t^2\right) 2t.$$