Université de Liège

1, 2, 3... Sciences

Année académique 2009-2010

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES B 2009-2010 : TEST 2 (GÉOGRAPHIE)

On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{i} & 0 & 1 \\ -1 & i^2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Peut-on calculer BA ? Justifier. Si oui, que vaut ce produit ?

Solution. On peut calculer le produit BA car le nombre de colonnes (3) de B est égal au nombre de lignes de A; le produit est une matrice de format 1×3.
Comme $\dfrac{1}{i} = -i$ et $i^2 = -1$, la matrice A peut s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & -i & 1-2i \end{pmatrix}.$$

b) Si elle existe, calculer la matrice inverse de A^*.

Solution. La matrice adjointe A^* est égale à

$$\begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut $(-i).(-i) = -1 \neq 0$. Ainsi A^* admet une matrice inverse.
Comme sa matrice des cofacteurs est donnée par

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ -i & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \text{on a} \quad (A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & i \end{pmatrix}$$

c) Déterminer les valeurs propres de A^*.

Solution. Les valeurs propres de A^* sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} i-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -i-\lambda \end{vmatrix} = (-i-\lambda)(i-\lambda)(-1-\lambda)$$

c'est-à-dire les complexes $-i$, i et -1.

Mathématiques générales B 2009-2010 : Test 2 (Chimie)

On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{i} & -1 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Peut-on calculer BA ? Justifier. Si oui, que vaut ce produit ?

Solution. On peut calculer le produit BA car le nombre de colonnes (3) de B est égal au nombre de lignes de A; le produit est une matrice de format 1×3.
Comme $\frac{1}{i} = -i$ et $i^2 = -1$, la matrice A peut s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i & 2-i & i \end{pmatrix}.$$

b) Si elle existe, calculer la matrice inverse de A^*.

Solution. La matrice adjointe A^* est égale à

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut $(-i).(-i) = -1 \neq 0$. Ainsi A^* admet une matrice inverse.
Comme sa matrice des cofacteurs est donnée par

$$\begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix}, \quad \text{on a} \quad (A^*)^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & -1 \\ i & -1 & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

c) Déterminer les valeurs propres de A^*.

Solution. Les valeurs propres de A^* sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} i-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -i-\lambda \end{vmatrix} = (-i-\lambda)(i-\lambda)(-1-\lambda)$$

c'est-à-dire les complexes $-i$, i et -1.

Mathématiques générales B 2009-2010 : Test 2
(Biologie, Géologie, Physique et Informatique)

On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} i^3 & \frac{1}{i} & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -i & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Peut-on calculer AB^* ? Justifier. Si oui, que vaut ce produit ?

Solution. On peut calculer le produit AB^* car le nombre de colonnes (3) de A est égal au nombre de lignes de B^*; le produit est une matrice de format 3×1.
Comme $i^3 = -i$ et $\dfrac{1}{i} = -i$, la matrice A peut s'écrire

$$A = \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dès lors,

$$AB^* = \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) Si elle existe, calculer la matrice inverse de $\overline{A}$.

Solution. La matrice conjuguée $\overline{A}$ est égale à

$$\begin{pmatrix} i & i & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et son déterminant vaut $(-1).(-i^2) = -1 \neq 0$. Ainsi $\overline{A}$ admet une matrice inverse.
Comme sa matrice des cofacteurs est donnée par

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2i \\ i & -i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{on a} \quad (\overline{A})^{-1} = \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ -2i & -2i & -1 \end{pmatrix}$$

c) Déterminer les valeurs propres de $\overline{A}$.

Solution. Les valeurs propres de $\overline{A}$ sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{vmatrix} i-\lambda & i & 0 \\ 0 & -i-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(i-\lambda)(-i-\lambda)$$

c'est-à-dire les complexes $-i,\ i$ et -1.