1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES B 2009-2010 : TEST 3
(BIOLOGIE, GÉOGRAPHIE, GÉOLOGIE ET PHYSIQUE)

Soit $f : x \mapsto \sin^2(x)$**. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en** x_0 **pour la fonction** f
a) si $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$
b) si $x_0 = 0$**. Dans ce cas, représenter** f **et son approximation dans un même repère orthonormé.**

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $Df(x) = \sin(2x),\ D^2f(x) = 2\ \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ donc
a) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,\ Df\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $D^2f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2$
b) $f(0) = 0,\ Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = 2$.

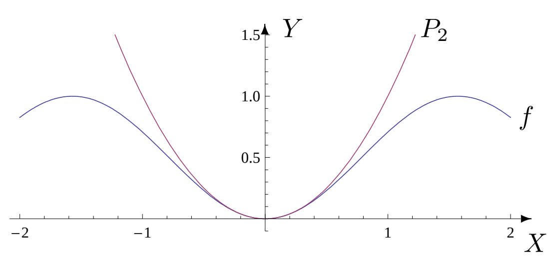
Dès lors, l'approximation polynomiale en $\frac{\pi}{2}$ est le polynôme

$$P_2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + Df\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + D^2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

et l'approximation polynomiale en 0 est le polynôme

$$P_2(x) = f(0) + Df(0)x + D^2f(0)\frac{x^2}{2!} = x^2.$$

Voici la représentation graphique de f et de son approximation polynomiale en 0



Mathématiques générales B   2009-2010 : Test 3 (Chimie)

Soit $f : x \mapsto 2\sin^2(x)$. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en x_0 pour la fonction f
a) si $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$
b) si $x_0 = 0$. Dans ce cas, représenter f et son approximation dans un même repère orthonormé.

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $Df(x) = 2\sin(2x)$, $D^2f(x) = 4\ \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ donc
a) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $Df\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ et $D^2f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
b) $f(0) = 0$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = 4$.

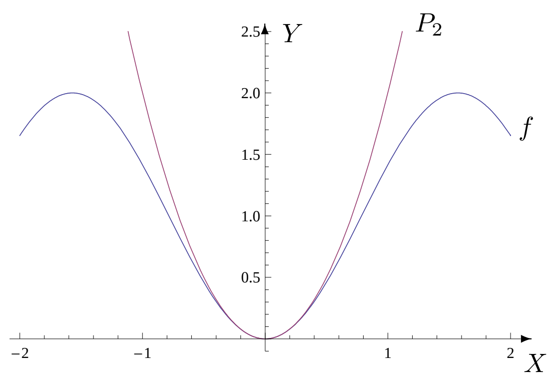
Dès lors, l'approximation polynomiale en $\frac{\pi}{4}$ est le polynôme

$$P_2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + Df\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + D^2f\left(\frac{\pi}{4}\right)\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

et l'approximation polynomiale en 0 est le polynôme

$$P_2(x) = f(0) + Df(0)x + D^2f(0)\frac{x^2}{2!} = 2x^2.$$

Voici la représentation graphique de f et de son approximation polynomiale en 0



Mathématiques générales B   2009-2010 : Test 3 (Informatique)

Soit $f : x \mapsto 2\cos^2(x)$. Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en x_0 pour la fonction f
a) si $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$
b) si $x_0 = 0$. Dans ce cas, représenter f et son approximation dans un même repère orthonormé.

Solution. La fonction f est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $Df(x) = -2\sin(2x)$, $D^2f(x) = -4\ \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$ donc
a) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$, $Df\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ et $D^2f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$
b) $f(0) = 2$, $Df(0) = 0$ et $D^2f(0) = -4$.

Dès lors, l'approximation polynomiale en $\frac{\pi}{6}$ est le polynôme

$$P_2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) + Df\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + D^2f\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2}{2!} = \frac{3}{2} - \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2.$$

et l'approximation polynomiale en 0 est le polynôme

$$P_2(x) = f(0) + Df(0)x + D^2f(0)\frac{x^2}{2!} = 2 - 2x^2.$$

Voici la représentation graphique de f et de son approximation polynomiale en 0