1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Corrigé de l'examen de math du 16 août 2010
Mathématiques générales A

Version 20 août 2010

Mathématiques générales A, 2009-2010 Examen du lundi 16/08/10

Question de théorie

(a) Enoncer le théorème des accroissements finis en toute généralité.
(b) Ensuite l'appliquer au cas de la fonction $x \mapsto e^{-x}$, tracer le graphique de cette fonction dans un repère orthonormé et donner une interprétation graphique du théorème.

Solution. Cf. août 2009

Exercices

1. **Résoudre l'équation suivante (on suppose que $x \in [0, 2\pi]$)**

$$\cos^2 x - \sin^2(2x) = 0.$$

Solution. Comme $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, l'équation est équivalente à

$$\begin{aligned} \cos^2(x) - 4\sin^2(x)\ \cos^2(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2(x)(1 - 4\sin^2(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble de ses solutions est donné par

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\left|-x^2 + 3x - 2\right|}{(x-1)^2}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non minoré. Le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
On a $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|} = 0^+$ et $\lim_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty$. L'application du théorème des limites des fonctions composées donne

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{y\to 0^+} \ln(y) = -\infty.$$

La fonction $x \mapsto \frac{\left|-x^2 + 3x - 2\right|}{(x-1)^2}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre A, le calcul de la limite en 1 peut être envisagé.
Cela étant, on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\left|-x^2 + 3x - 2\right|}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{|(x-1)(x-2)|}{(x-1)^2} = +\infty$$

après simplification de la fraction par $x - 1$ puisque la fraction est positive.

3. **Déterminer l'aire de la surface bornée fermée déterminée par le graphique des fonctions sinus et cosinus de domaine de définition restreint à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Dans un repère orthonormé, représenter cette surface en la hachurant.**

Solution. Cf. mai 2010

4. **(a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+e^{-3x}}$ vérifie l'équation différentielle**

$$Df = 3f\left(1-2f\right).$$

Solution. La fonction donnée est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$D\left(\frac{1}{2+e^{-3x}}\right) = \frac{3\ e^{-3x}}{(2+e^{-3x})^2}.$$

Dès lors, comme

$$3f(1-2f) = \frac{3}{2+e^{-3x}}\left(1-\frac{2}{2+e^{-3x}}\right) = \frac{3}{2+e^{-3x}}\left(\frac{2+e^{-3x}-2}{2+e^{-3x}}\right) = \frac{3\ e^{-3x}}{(2+e^{-3x})^2}$$

la fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) - 2Df(x) + f(x) = 2+x$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x) - 2Df(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$ et son zéro double est 1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$(c_1x + c_2)e^x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax + B,\ x \in \mathbb{R}$ où A et B sont des constantes à déterminer. Comme $Df_P(x) = A$ et $D^2f_P(x) = 0$, on a $-2A + Ax + B = x + 2$ et, par identification des coefficients des polynômes, on obtient $A = 1$ et $B = 4$.
Ainsi, $f_P(x) = x + 4,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1x + c_2)e^x + x + 4,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

5. **Une caisse contenant 4 bouteilles pèse 7 kg. Avec 9 bouteilles, elle pèse 13kg. Que pèse la caisse ? Que pèse une bouteille ?**
Répondre à cette question en rédigeant clairement vos démarches et en exprimant vos résultats avec les mêmes unités.

Solution. Notons C le poids en kg de la caisse vide et B le poids en kg d'une bouteille. On a alors le système

$$\left\{\begin{array}{l} C+4B=7 \\ C+9B=13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5B = 13-7=6 \\ C = 7-4B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} B=\frac{6}{5}=1,2 \\ C = 7-\frac{24}{5}=\frac{9}{5}=2,2. \end{array}\right.$$

Ainsi, la caisse vide pèse 2,2 kg et une bouteille pèse 1,2 kg.

1, 2, 3...Sciences

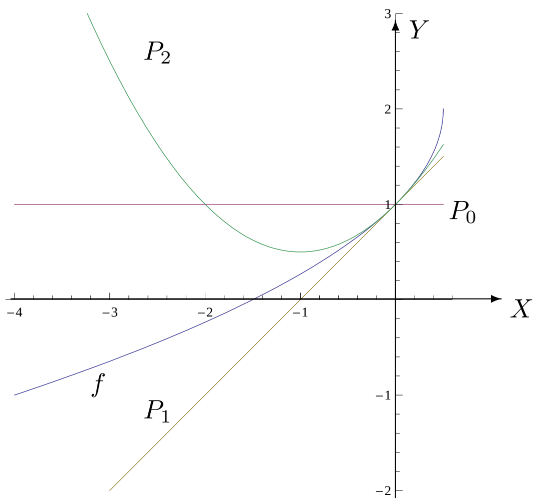
Année académique 2009-2010

Corrigé de l'examen de math du 16 août 2010
Mathématiques générales B

Version 20 août 2010

1. **On donne la fonction f par**
$$f(x) = 2 - \sqrt{1-2x}.$$
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $0, 1, 2$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, esquisser le graphique de f et dessiner le graphique des approximations demandées (en utilisant différentes couleurs).

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $]-\infty, \frac{1}{2}[$ et on a
$$Df(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{et} \quad D^2f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-2x)^3}}.$$
Comme $f(0) = 1,\ Df(0) = 1$ et $D^2f(0) = 1$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a
$$P_0(x) = f(0) = 1,\ P_1(x) = P_0(x) + Df(0)x = 1 + x$$
et
$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$



2. **a) On donne la matrice**
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Déterminer les valeurs propres de A.
- Déterminer les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0.
- Montrer que le vecteur
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
est vecteur propre de valeur propre $\sqrt{2}$.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de
$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\lambda)(\lambda^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + \sqrt{2})(\lambda - \sqrt{2}) = 0$$
si on applique la première loi des mineurs à la troisième ligne de ce déterminant.
Ainsi, les valeurs propres de A sont $0,\ -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs X non nuls tels que $AX = 0$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les multiples non nuls du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour prouver que le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est vecteur propre de valeur propre $\sqrt{2}$, il suffit de prouver que $AX = \sqrt{2}X$.
On a bien

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Soient les réels α, β et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\sin\beta & \cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix}.$$

- Calculer le produit AB et simplifier l'expression des éléments de cette matrice au maximum.
- Montrer que le complexe $\lambda = \sin\alpha - i\cos\alpha$ est une valeur propre de la matrice A.
- Déterminer les valeurs propres de la matrice B.

Solution. Le produit AB vaut

$$\begin{pmatrix} -\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\ -\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que le complexe $\lambda = \sin\alpha - i\cos\alpha$ est une valeur propre de la matrice A, il suffit de prouver que λ est un zéro du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$.
Comme on a

$$\det(A - (\sin\alpha - i\cos\alpha)I) = \begin{vmatrix} i\cos\alpha & -\cos\alpha \\ \\ cos\alpha & i\cos\alpha \end{vmatrix} = 0$$

(la deuxième colonne est le produit de la première par i), on en conclut que $\lambda = \sin\alpha - i\cos\alpha$ est bien valeur propre de A.

On a

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} -\sin\beta - \lambda & \cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-\sin\beta - \lambda)(\sin\beta - \lambda) - \cos^2\beta \\ &= \lambda^2 - (\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\ &= \lambda^2 - 1. \end{aligned}$$

Dès lors, les valeurs propres de B (solutions de l'équation $\det(B - \lambda I) = 0$) sont 1 et -1.

3. **a) On donne la fonction de deux variables f par $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.**
- Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f.
- Dans le domaine de dérivabilité de f, que vaut l'expression

$$D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y)?$$

Solution. Les 3 domaines demandés sont égaux à l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 0, \sqrt{x^2+y^2} > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Dans A, on a $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ donc on obtient directement

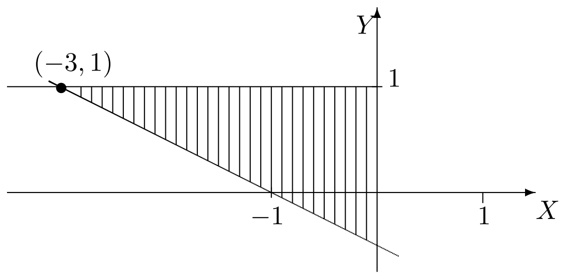
$$D_x f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad D_x^2 f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ainsi que

$$D_y f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad D_x^2 f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Dès lors, $D_x^2 f(x,y) + D_y^2 f(x,y) = 0$.

b) On donne l'ensemble fermé borné hachuré suivant



Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale de la fonction f suivante sur cet ensemble ; simplifier votre réponse au maximum

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-y-1)^2}$$

Solution. L'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes, est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3,0],\ y \in \left[-\frac{x+1}{2}, 1\right]\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],\ x \in [-2y-1, 0]\right\}.$$

C'est un ensemble fermé et borné.

La fonction f est continue sur l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y-1 \neq 0\}$ (complémentaire de la droite d'équation cartésienne $x-y-1=0$, laquelle est d'intersection vide avec A) donc continue sur A. La fonction est dès lors intégrable sur A et on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{-2y-1}^{0} \frac{1}{(x-y-1)^2}\, dx\right) dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{-1}{x-y-1}\right]_{x=-2y-1}^{x=0} dy \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{y+1} + \frac{1}{-3y-2}\right) dy = \left[\ln(|y+1|) - \frac{1}{3}\ln(|3y+2|)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} \\
&= \ln 2 - \frac{1}{3}\ln 5 - \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\ln 5 + \frac{5}{3}\ln 2.
\end{aligned}$$

4. (*Physiciens, informaticiens, chimistes, géographes*)
Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}, \quad (ii)\ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}, \quad (iii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{m^2+1}.$$

Solution. La série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{m}{2}}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m$, série géométrique convergente puisque $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}-1}.$$

La série $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!}$ est convergente car c'est l'image du réel 1 par la fonction exponentielle. La somme de cette série vaut $\exp(1) = e$.

La série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{m^2+1}$ diverge. En effet, on a

$$\frac{m}{m^2+1} = \frac{1}{m+\frac{1}{m}} \geq \frac{1}{m+1} \geq \frac{1}{2m}$$

quel que soit le naturel $m \geq 1$. Comme la série de terme général $\frac{1}{m}$ diverge, par le critère de comparaison, la série donnée diverge aussi.

5. (*Physiciens et informaticiens*)
On donne la succession d'intégrales simples suivantes

$$\int_0^1 \left(\int_1^{e^x} \ln y \ dy\right) dx.$$

(i) Calculer (si possible) cette succession d'intégrales.
(ii) Représenter l'ensemble A (partie du plan) sur lequel on intègre.
(iii) Permuter l'ordre d'intégration.

Solution. Cf. août 2009 sections de biologie et géologie.