Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Corrigé de l'examen de math du 25 mai 2010
Mathématiques générales B

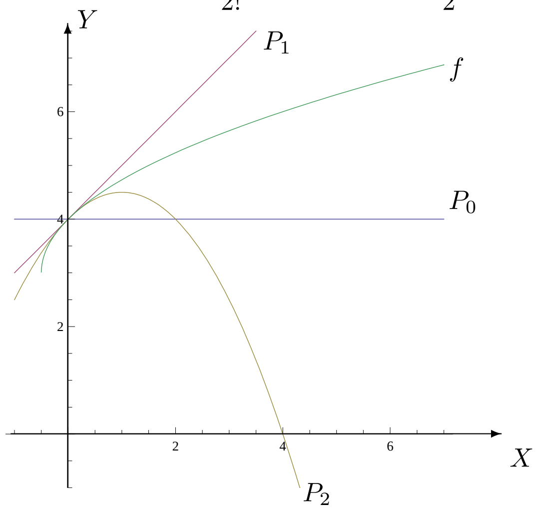
Version 26 mai 2010

Mathématiques générales B, 2009-2010 Examen du mardi 25 mai 2010

---

1. **On donne la fonction f par**
$$f(x) = 3 + \sqrt{1+2x}.$$
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre $0, 1, 2$ en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, esquisser le graphique de f et dessiner le graphique des approximations demandées (en utilisant différentes couleurs).

Solution. La fonction est infiniment dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et on a
$$Df(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \quad \text{et} \quad D^2f(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1+2x)^3}}.$$
Comme $f(0) = 4,\ Df(0) = 1$ et $D^2f(0) = -1$, si on note $P_n(x)$ l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on a
$$P_0(x) = f(0) = 4,\ P_1(x) = P_0(x) + Df(0)x = 4 + x$$
et
$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2!}x^2 = 4 + x - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}.$$



2. **a) On donne la matrice**
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Déterminer les valeurs propres de A.
- Déterminer les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0.
- Montrer que le vecteur
$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
est vecteur propre de valeur propre $\sqrt{2}$.

Solution. Les valeurs propres de A sont les solutions de
$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda + (-\lambda)(\lambda^2 - 1) = \lambda(2 - \lambda^2) = 0,$$
si on applique la première loi des mineurs à la troisième ligne de ce déterminant.
Ainsi, les valeurs propres de A sont $0,\ -\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les vecteurs X non nuls tels que $AX = 0$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y+z=0 \\ x=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 0 sont les multiples non nuls du vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pour prouver que le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est vecteur propre de valeur propre $\sqrt{2}$, il suffit de prouver que $AX = \sqrt{2}X$.
On a bien

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Soient les réels a, b et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\cos b & \sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

- Calculer le produit AB et simplifier l'expression des éléments de cette matrice au maximum.
- Montrer que le complexe $\lambda = \cos a - i \sin a$ est une valeur propre de la matrice A.
- Déterminer les valeurs propres de la matrice B.

Solution. Le produit AB vaut

$$\begin{pmatrix} -\cos a \cos b - \sin a \sin b & \sin b \cos a - \sin a \cos b \\ -\sin a \cos b + \sin b \cos a & \sin a \sin b + \cos a \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(b-a) & \sin(b-a) \\ \sin(b-a) & \cos(b-a) \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que le complexe $\lambda = \cos a - i \sin a$ est une valeur propre de la matrice A, il suffit de prouver que λ est un zéro du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$.
Comme on a

$$\det(A - (\cos a - i \sin a)I) = \begin{vmatrix} i \sin a & -\sin a \\ \sin a & i \sin a \end{vmatrix} = 0$$

(la deuxième colonne est le produit de la première par i), on en conclut que $\lambda = \cos a - i \sin a$ est bien valeur propre de A.

Les valeurs propres de B sont les solutions de l'équation

$$\det \begin{pmatrix} -\cos b - \lambda & \sin b \\ \sin b & \cos b - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-\cos b - \lambda)(\cos b - \lambda) - \sin^2 b = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (\cos^2 b + \sin^2 b) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0.$$

Ainsi, les valeurs propres de B sont 1 et -1.

c) Soit M la matrice (qui dépend des réels x et y)

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ x^2 & y^2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M est une fonction des réels x et y, notée $g(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Représenter l'ensemble des couples (x, y) tels que $g(x, y) = 0$.

Solution. On a $g(x,y) = xy^2 - x^2y = xy(y-x)$ et $g(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ ou $y = x$. L'ensemble des couples (x,y) tels que $g(x,y) = 0$ est représenté par les points des axes du repère orthonormé dans lequel on travaille ainsi que par ceux de la bissectrice du premier quadrant.

3. **a) On donne la fonction de deux variables f par $f(x,y) = \arcsin(1-2xy)$.**
- Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f. Représenter ces domaines dans un repère orthonormé en les hachurant.
- Dans le domaine de dérivabilité de f, comparer les expressions $xD_xf(x,y)$ et $yD_yf(x,y)$.

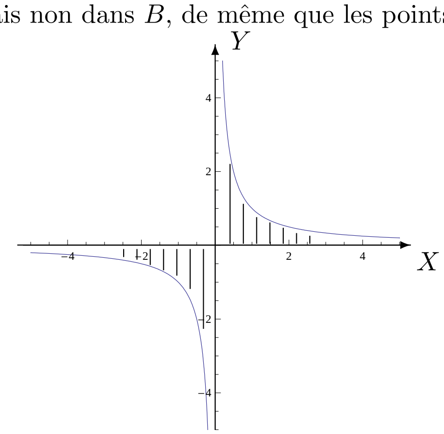
Solution. Les domaines de définition et de continuité de la fonction f sont égaux à l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq 1 - 2xy \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 1\}$$

et le domaine de dérivabilité est égal à

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1\}.$$

Voici une représentation graphique de ces ensembles (partie hachurée) : les points de l'hyperbole sont compris dans A mais non dans B, de même que les points des axes X et Y.



Dans B, on a

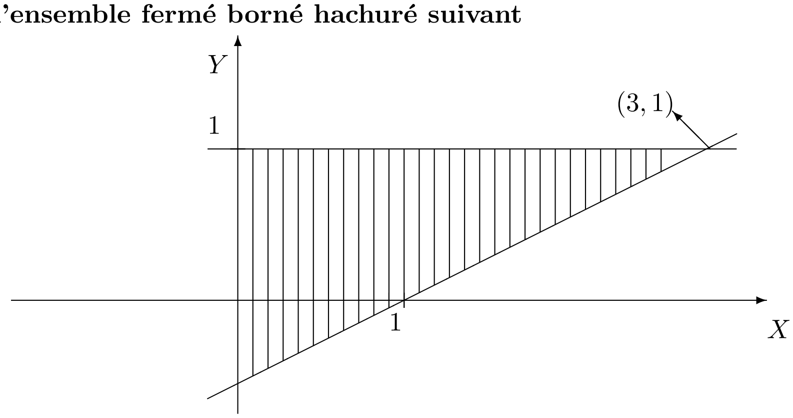
$$xD_xf(x,y) = \frac{x(-2y)}{\sqrt{1-(1-2xy)^2}} = \frac{-2xy}{\sqrt{1-(1-2xy)^2}}$$

et

$$yD_yf(x,y) = \frac{y(-2x)}{\sqrt{1-(1-2xy)^2}} = \frac{-2xy}{\sqrt{1-(1-2xy)^2}}.$$

Les deux expressions données sont donc égales.

b) On donne l'ensemble fermé borné hachuré suivant



Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale de la fonction f suivante sur cet ensemble ; simplifier votre réponse au maximum

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y+1)^2}$$

Solution. cf. correction de la question 2 de l'interrogation « à blanc ».

4. (*Physiciens, informaticiens, chimistes, géographes*)
Déterminer si les séries suivantes convergent. Si oui, en déterminer la somme

$$(i)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\frac{m}{2}}}, \quad (ii)\ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^m}{m!}, \quad (iii)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}.$$

Solution. La série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\frac{m}{2}}}$ peut aussi s'écrire sous la forme $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^m$, série géométrique convergente puisque $\frac{1}{\sqrt{3}} \in]-1,1[$. La somme de cette série vaut

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^m = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

La série $\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\ln 3)^m}{m!}$ est convergente car c'est l'image du réel $\ln 3$ par la fonction exponentielle. La somme de cette série vaut $\exp(\ln 3) = 3$.

La série $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m!}{m^2}$ diverge. En effet, on a

$$\frac{m!}{m^2} = \frac{(m-1)!}{m} \geq \frac{m-1}{m} \geq \frac{1}{2}$$

quel que soit le naturel $m \geq 2$. La suite $\frac{m!}{m^2}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ ne converge donc pas vers 0. Dès lors, la série de terme général $\frac{m!}{m^2}$ ne converge pas.

5. (*Physiciens et informaticiens*)
Depuis le sol, on lance une petite fusée. On note C la quantité de carburant (en litres) au départ. Tous les 1000 km, elle consomme une part (notée q) du carburant qui lui reste. Après M milliers de kilomètres (M est un naturel strictement positif), elle aura ainsi consommé

$$S_M = qC \sum_{m=0}^{M-1} (1-q)^m$$

litres. En supposant que $q \in]0,1[$, et en sommant la série, si c'est possible, peut-on dire que la fusée finit par consommer tout son carburant ? Pourquoi ?

Solution. Comme $q \in]0,1[$ alors $1-q \in]0,1[$ et la série $\sum_{m=0}^{+\infty} (1-q)^m$ est une série géométrique convergente dont la somme vaut $\frac{1}{1-(1-q)} = \frac{1}{q}$.

Ainsi,

$$\lim_{M \to +\infty} S_M = qC\ \frac{1}{q} = C$$

ce qui montre que la fusée finit par consommer tout son carburant.