Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Mathématiques générales B

Corrigé de l'interrogation du 29 mars 2010

Version 26 mars 2010

Questions de théorie : **voir notes de cours.**

1. Qu'appelle-t-on matrice diagonale ?
2. Qu'appelle-t-on matrice diagonalisable ?
3. Dans le contexte du produit entre matrices, qu'appelle-t-on associativité ?
4. Soit A une matrice carrée et soit λ une valeur propre de cette matrice. Qu'appelle-t-on vecteur propre relatif à la valeur propre λ ?
5. *Physiciens et informaticiens seuls*
Soient A une matrice qui possède 3 lignes et 4 colonnes et B une matrice qui possède 4 lignes et 5 colonnes. Définir l'élément de la matrice produit AB qui se trouve sur la deuxième ligne et la troisième colonne.

QCM

On considère l'approximation polynomiale à l'ordre 2 de la fonction sinus en $x_0 = 9$. On l'utilise pour obtenir une approximation numérique de la valeur de $\sin(10)$.

(i) En fonction de $\sin(9)$ et $\cos(9)$, cette approximation numérique de $\sin(10)$ est égale à
♣ $\dfrac{\sin(9)}{2} + \cos(9)$ ☐ $\dfrac{3\sin(9)}{2} + \cos(9)$ ☐ $\dfrac{\sin(9)}{2} - \cos(9)$ ☐ $\dfrac{3\sin(9)}{2} - \cos(9)$
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

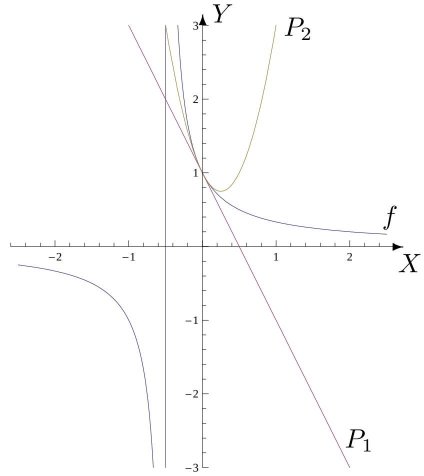
(ii) En valeur absolue, le reste de cette approximation est
♣ plus petit que $1/6$ ☐ plus grand que $1/6$ ☐ nul ☐ égal à $\cos(9)/6$
☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

Exercices

1. **On donne la fonction f par**
$$f(x) = \frac{1}{1+2x}.$$
a) Si possible, déterminer les approximations polynomiales de cette fonction à l'ordre 1 et 2 en 0.
b) Dans un même repère orthonormé, représenter f et ses approximations (en utilisant différentes couleurs).
c) Justifier la position relative des courbes au voisinage de 0.

Solution. a) La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. Comme
$$Df(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2}, \qquad D^2f(x) = \frac{8}{(1+2x)^3},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$
et comme $f(0) = 1,\ Df(0) = -2$ et $D^2f(0) = 8$, l'approximation polynomiale à l'ordre 1 en 0 est le polynôme
$$P_1(x) = f(0) + Df(0)x = 1 - 2x,\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$
et l'approximation polynomiale à l'ordre 2 en 0 est le polynôme
$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{D^2f(0)}{2}x^2 = 1 - 2x + 4x^2,\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$$

b) Les représentations graphiques sont les suivantes



c) Comme

$$f(x) - P_1(x) = \frac{4x^2}{1+2x} \geq 0 \quad \forall x > -\frac{1}{2},$$

au voisinage de 0 le graphique de f est situé au-dessus de celui de P_1.
D'autre part,

$$f(x) - P_2(x) = \frac{-8x^3}{1+2x} \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad x \in]-\frac{1}{2}, 0[\\ < 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} .$$

Dès lors, au voisinage de 0, pour $x \in]-\frac{1}{2}, 0[$, le graphique de f est situé au-dessus de celui de P_2 tandis que pour $x > 0$, le graphique de f est situé en dessous de celui de P_2.

2. **Soient les réels a, b et soient les matrices**

$$A = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le produit AB et simplifier l'expression des éléments de cette matrice au maximum.
b) Montrer que le complexe $\lambda = \cos a + i \sin a$ est une valeur propre de la matrice A.

Solution. a) On a

$$AB = \begin{pmatrix} \cos a \cos b - \sin a \sin b & -\sin b \cos a - \sin a \cos b \\ \sin a \cos b + \sin b \cos a & -\sin a \sin b + \cos a \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) & -\sin(a+b) \\ \sin(a+b) & \cos(a+b) \end{pmatrix}$$

b) Il suffit de prouver que $\lambda = \cos a + i \sin a$ est un zéro du polynôme caractéristique $\det(A - \lambda I)$.
Comme on a

$$\det(A - (\cos a + i \sin a)I) = \begin{vmatrix} -i \sin a & -\sin a \\ \sin a & -i \sin a \end{vmatrix} = 0$$

puisque la deuxième ligne est le produit de la première par i, on en conclut que $\lambda = \cos a + i \sin a$ est bien valeur propre de A.

3. **On donne la matrice**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
b) Montrer que, quel que soit le complexe non nul c, le vecteur

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -3c \end{pmatrix}$$

est un vecteur propre de valeur propre 1 **et que tout autre vecteur propre de valeur propre** 1 **est de ce type.**

Solution. a) Notons A la matrice donnée. Les valeurs propres de A sont les zéros du polynôme caractéristique $\det(A-\lambda I)$. En appliquant la première loi des mineurs à la troisième colonne, on a

$$\left|\begin{array}{ccc} 1-\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{array}\right| = 1.(-1)^4 \left|\begin{array}{cc} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 0 \end{array}\right| + (1-\lambda)(-1)^6 \left|\begin{array}{cc} 1-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{array}\right|$$

$$= (1-\lambda)(-1+(1-\lambda)^2-3) = (1-\lambda)(1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (1-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda).$$

Dès lors, les valeurs propres de la matrice sont -1, 1 et 3.

b) Si on note X le vecteur donné, pour prouver que ce vecteur est un vecteur propre de valeur propre 1, il suffit de prouver que $AX = X$. En effectuant le produit, on a

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c-3c \\ c \\ -3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -3c \end{pmatrix}.$$

Montrons que tout vecteur propre de valeur propre 1 est de même type que le vecteur donné en résolvant le système $(A-I)X = 0$ où X est un vecteur non nul. On a

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y+z=0 \\ x=0 \end{array} \right.$$

Les vecteurs propres de valeur propre 1 sont donc les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -3c \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{C}_0.$$

4. **On donne la matrice**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ r & s & t \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de cette matrice est égal à 3**, que vaut le déterminant de**

$$\begin{pmatrix} 7a & c & b \\ 7d & f & e \\ 7r & t & s \end{pmatrix}$$

et pourquoi ?

Solution. On sait que si on permute deux rangées parallèles d'un déterminant, ce déterminant change de signe. De plus, pour multiplier un déterminant par un nombre non nul, on multiplie tous les éléments d'une même rangée par ce nombre. Dès lors,

$$\left|\begin{array}{ccc} 7a & c & b \\ 7d & f & e \\ 7r & t & s \end{array}\right| = -7 \left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ r & s & t \end{array}\right| = -21.$$