1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2009-2010

Mathématiques générales B- suite

Corrigé de l'interrogation « à blanc » sur les fonctions de plusieurs variables
Avril 2010

Version 2 avril 2010

Exercices

1. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x,y) = \ln\left(x^2 - 4y^2 + 1\right)$$

a) Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité de f. En donner une représentation graphique dans le même repère orthonormé, en utilisant différentes couleurs.
b) Déterminer l'expression explicite de la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable.
c) Quelle est la valeur de la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable au point de coordonnées $(1,1)$?
d) On définit la fonction F par

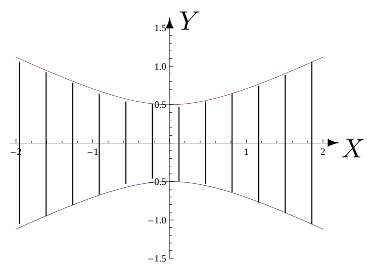
$$F(t) = f\left(2e^t + \frac{1}{16}e^{-t}, e^t + \frac{1}{16}e^{-t}\right).$$

Quel est le domaine de définition, de dérivabilité de F ? Déterminer l'expression explicite de la dérivée de F.

Solution. a) Les domaines de définition et de dérivabilité sont égaux à

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 + 1 > 0\}.$$

La représentation graphique de cet ensemble est la partie hachurée du plan ci-dessous, les points de l'hyperbole étant exclus.



b) L'expression explicite de la dérivée partielle de f par rapport à sa deuxième variable est la fonction donnée par

$$D_y f(x,y) = \frac{-8y}{x^2 - 4y^2 + 1},\ (x,y) \in A.$$

c) Le point de coordonnées $(1,1)$ n'appartient pas au domaine de dérivabilité ; on ne peut donc pas calculer la valeur de la dérivée de f par rapport à sa deuxième variable en ce point.

d) Calculons la valeur de l'expression $x^2 - 4y^2 + 1$ pour $x = 2e^t + \frac{1}{16}e^{-t}$ et $y = e^t + \frac{1}{16}e^{-t}$. On a

$$\left(2e^t + \frac{1}{16}e^{-t}\right)^2 - 4\left(e^t + \frac{1}{16}e^{-t}\right)^2 + 1 = 4e^{2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16^2}e^{-2t} - 4e^{2t} - \frac{1}{2} - \frac{4}{16^2}e^{-2t} + 1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{16^2}e^{-2t}.$$

Le domaine de définition et de dérivabilité de F est l'ensemble

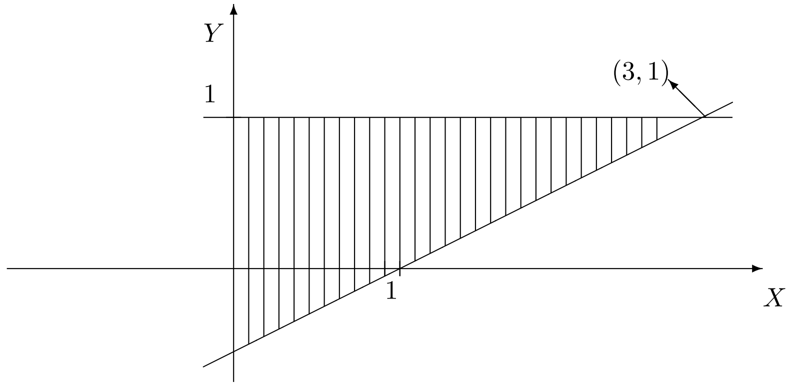
$$\left\{t \in \mathbb{R} : \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{64}e^{-2t}\right) > 0\right\} = \{t \in \mathbb{R} : 64 - e^{-2t} > 0\} = \{t \in \mathbb{R} : 2t > -\ln 64\} =]-3\ln 2, +\infty[$$

et la dérivée de F est donnée par

$$DF(t) = D\ln\left(\frac{3}{256}\left(64 - e^{-2t}\right)\right) = D\left(\ln\left(\frac{3}{256}\right) + \ln\left(64 - e^{-2t}\right)\right) = D\ln(64 - e^{-2t})$$

$$= \frac{2e^{-2t}}{64 - e^{-2t}} = \frac{2}{64\,e^{2t} - 1},\ t \in]-3\ln 2, +\infty[.$$

2. **On donne l'ensemble fermé borné hachuré suivant**



Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale de la fonction f suivante sur cet ensemble ; simplifier votre réponse au maximum

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y+1)^2}$$

Solution. L'ensemble d'intégration A, parallèle aux deux axes, est égal à

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,3],\ y \in \left[\frac{x-1}{2}, 1\right]\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right],\ x \in [0, 2y+1]\right\}.$$

La fonction f est continue sur l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y+1 \neq 0\}$; elle est donc continue sur A, ensemble fermé borné, donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_0^{2y+1} \frac{1}{(x+y+1)^2}\ dx\right)\ dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[\frac{-1}{x+y+1}\right]_{x=0}^{x=2y+1} dy = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{-1}{3y+2} + \frac{1}{y+1}\right)\ dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\ln(|3y+2|) + \ln(|y+1|)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = -\frac{1}{3}\ln 5 + \ln 2 + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\ln 5 + \frac{5}{3}\ln 2.$$

3. **On donne l'ensemble A suivant**

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x| \leq y \leq x^2\right\}$$

a) Représenter graphiquement cet ensemble dans un repère orthonormé.
b) Si c'est possible, déterminer la valeur de l'intégrale de la fonction g donnée par

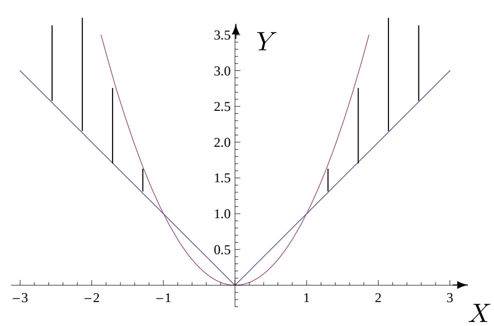
$$g(x,y) = xe^{-y}$$

- pour les biologistes et les géologues : **sur la partie de A dont les points ont une abscisse positive et simplifier votre réponse au maximum**
- pour les autres : **sur A et simplifier votre réponse au maximum**

Solution. a) L'ensemble A, fermé non borné et parallèle à Y mais non à X, est égal à

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[,\ x \in [-y, -\sqrt{y}] \cup [\sqrt{y}, y]\}$$

et sa représentation graphique est la partie hachurée du plan, les points des « bords » étant compris dans l'ensemble.



b) **Pour les biologistes et les géologues** : considérons l'ensemble fermé non borné

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,+\infty[,\ x \in [\sqrt{y}, y]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1,+\infty[,\ y \in [x,x^2]\}$$

et étudions l'intégrabilité de la fonction g continue et positive sur A_1.

Si x est fixé dans $[1,+\infty[$ alors la fonction g est continue sur le fermé borné $[x,x^2]$; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_x^{x^2} xe^{-y}\ dy = \left[-xe^{-y}\right]_{y=x}^{y=x^2} = -xe^{-x^2} + xe^{-x}.$$

Comme cette fonction est positive sur $[1,+\infty[$, en étudiant son intégrabilité par application de la définition, on aura, si la limite est finie, l'intégrabilité ainsi que la valeur de l'intégrale sur $[1,+\infty[$ et par conséquent celles de g sur A_1. Calculons

$$L = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \left(-xe^{-x^2} + xe^{-x}\right)\ dx.$$

On a

$$L = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\, e^{-x^2} - xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\, e^{-t^2} - te^{-t} - e^{-t} - \frac{1}{2}\, e^{-1} + e^{-1} + e^{-1}\right) = \frac{3}{2e}.$$

Ainsi, g est intégrable sur A_1 et son intégrale sur A_1 vaut $\dfrac{3}{2e}$.

Pour les autres : le signe de la fonction g n'étant pas constant sur A, on travaille séparément sur A_1 (cf. ci-dessus) et sur

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1,+\infty[,\ x \in [-y, -\sqrt{y}]\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty,-1],\ y \in [-x,x^2]\}.$$

Vérifions l'intégrabilité de g sur A_2, ensemble fermé non borné dans lequel g est négatif et continu. Si x est fixé dans $]-\infty,-1]$ alors la fonction $|g|$ est continue sur le fermé borné $[-x,x^2]$; elle est donc intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_{-x}^{x^2} -xe^{-y}\ dy = \left[xe^{-y}\right]_{y=-x}^{y=x^2} = xe^{-x^2} - xe^{x}.$$

Comme cette fonction est positive sur $]-\infty,-1]$, en étudiant son intégrabilité par application de la définition, on aura, si la limite est finie, l'intégrabilité ainsi que la valeur de l'intégrale sur $]-\infty,-1]$ et par conséquent g sera intégrable sur A_2 et son intégrale vaudra l'opposé de la valeur trouvée. Calculons

$$L = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{-1} \left(xe^{-x^2} - xe^{x}\right)\ dx.$$

On a

$$L = \lim_{t\to-\infty} \left[-\frac{1}{2}\, e^{-x^2} - xe^{x} + e^{x}\right]_t^{-1} = \lim_{t\to-\infty} \left(-\frac{1}{2}\, e^{-1} + e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2}\, e^{-t^2} + te^{t} - e^{t}\right) = \frac{3}{2e}.$$

Ainsi, g est intégrable sur A_2 et son intégrale sur A_2 vaut $-\dfrac{3}{2e}$. Dès lors, g est intégrable sur A et son intégrale sur cet ensemble vaut 0.