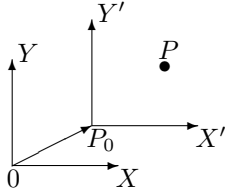


1 Rappels et définition

1.1 Changement de repère orthonormé

Translation

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé du plan d'axes X et Y . Les coordonnées d'un point P du plan dans ce repère sont (x, y) . Effectuons une translation de ce repère qui amène le point O sur le point P_0 dont les coordonnées dans le repère initial sont (x_0, y_0) . Dans ce nouveau repère, les coordonnées du point P sont (x', y') .

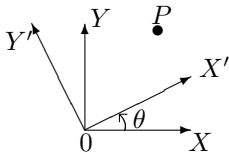


Le lien entre les coordonnées de P dans ces deux repères est donné par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad X = X_0 + X'.$$

Rotation

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère orthonormé du plan d'axes X et Y . Les coordonnées d'un point P du plan dans ce repère sont (x, y) . Effectuons une rotation de ce repère autour de O d'un angle θ dans le sens trigonométrique. Dans ce nouveau repère, les coordonnées du point P sont (x', y') .



Le lien entre les coordonnées de P dans ces deux repères est donné par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad X = UX'.$$

Remarquons que la matrice de rotation U est telle que $U^{-1} = \tilde{U}$.

Cas général

Si on effectue une translation et une rotation, le lien entre les coordonnées de P dans ces deux repères est donné par

$$X = X_0 + UX' \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

1.2 Définition d'une conique

Une conique est un ensemble de points du plan qui, dans un repère orthonormé, vérifient l'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

où les coefficients et les variables sont réels, les coefficients des termes du second degré n'étant pas tous nuls.

Sous forme matricielle, cette équation peut s'écrire

$$\tilde{X}HX + 2\tilde{B}X + f = 0 \quad \text{avec} \quad H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la matrice H n'est pas nulle et qu'elle est égale à sa transposée.

2 Effet d'un changement de repère sur l'équation d'une conique

Transformons l'équation générale d'une conique pour obtenir une équation canonique. Ces transformations s'effectuent à l'aide d'un changement de repère.

Considérons le changement de repère orthonormé défini par $X = X_0 + UX'$. L'équation $\widetilde{X}HX + 2\widetilde{B}X + f = 0$ s'écrit successivement

$$\begin{aligned} & (X_0 + UX')\widetilde{H}(X_0 + UX') + 2\widetilde{B}(X_0 + UX') + f = 0 \\ \Leftrightarrow & \widetilde{X}_0HX_0 + \widetilde{X}'\widetilde{U}HX_0 + \widetilde{X}_0HUX' + \widetilde{X}'\widetilde{U}HUX' + 2\widetilde{B}X_0 + 2\widetilde{B}UX' + f = 0 \\ \Leftrightarrow & \widetilde{X}'\widetilde{U}HUX' + 2\widetilde{X}_0HUX' + 2\widetilde{B}UX' + \widetilde{X}_0HX_0 + 2\widetilde{B}X_0 + f = 0 \\ \Leftrightarrow & \widetilde{X}'\widetilde{U}HUX' + 2(HX_0 + B)\widetilde{U}X' + \widetilde{X}_0HX_0 + 2\widetilde{B}X_0 + f = 0 \\ \Leftrightarrow & \widetilde{X}'H'X' + 2\widetilde{B}'X' + f' = 0 \end{aligned}$$

si on note $H' = \widetilde{U}HU$, $\widetilde{B}' = (HX_0 + B)\widetilde{U}$ et $f' = \widetilde{X}_0HX_0 + 2\widetilde{B}X_0 + f$.

Remarquons que puisque $\widetilde{U} = U^{-1}$, la matrice H' est la transformée de H par la matrice U . Si les colonnes de U sont des vecteurs propres de H alors la matrice H' sera une matrice diagonale.

On constate également que si X_0 est le tableau des coordonnées d'un point de la conique alors $f' = 0$.

3 Recherche des valeurs propres de H

Les valeurs propres de H sont les solutions de

$$\det(H - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Comme $\Delta = (a + c)^2 - 4ac + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$, on a deux valeurs propres réelles.

- $\Delta = 0$: dans ce cas, $a = c \neq 0$ avec $b = 0$ et l'équation de la conique s'écrit

$$ax^2 + ay^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

équation d'un cercle¹.

- $\Delta > 0$: dans ce cas, on a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 .

Remarquons que tout vecteur propre C_1 de valeur propre λ_1 est orthogonal à tout vecteur propre C_2 de valeur propre λ_2 .

En effet, on a $HC_1 = \lambda_1 C_1$ et $HC_2 = \lambda_2 C_2$. Dès lors, $\widetilde{C}_2HC_1 = \lambda_1 \widetilde{C}_2C_1$ et $\widetilde{C}_1HC_2 = \lambda_2 \widetilde{C}_1C_2 \Leftrightarrow \widetilde{C}_2HC_1 = \lambda_2 \widetilde{C}_2C_1$. En soustrayant membre à membre, on a donc $(\lambda_1 - \lambda_2)\widetilde{C}_2C_1 = 0$ et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on a $\widetilde{C}_2C_1 = 0$.

Ainsi, $H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ si la première colonne de U est le vecteur propre unitaire de H relatif à la valeur propre λ_1 et la deuxième le vecteur propre unitaire relatif à la valeur propre λ_2 .

Dès lors, $\widetilde{X}'H'X' = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$; on a ainsi éliminé le terme en xy .

4 Réduction de l'équation générale

Pour obtenir l'équation canonique d'une ellipse ou d'une hyperbole, il faut encore faire disparaître de l'équation les termes en x et en y c'est-à-dire prendre pour X_0 la solution, si elle existe, du système $HX + B = 0$.

Le système linéaire $HX = -B$ admet une seule solution X_0 si et seulement si $\det(H) \neq 0 \Leftrightarrow b^2 \neq ac$.²

Dans ce cas, comme $HX_0 = -B$, $f' = -\widetilde{X}_0B + 2\widetilde{B}X_0 + f = \widetilde{B}X_0 + f$ et l'équation devient

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + f' = 0 \quad \text{avec} \quad f' = \widetilde{B}X_0 + f,$$

ce qui est l'équation canonique d'une ellipse si les valeurs propres sont de même signe, d'une hyperbole sinon.

¹Ni ici, ni dans la suite, nous n'envisagerons les cas de dégénérescence.

²Comme $\det(H) = \det(H') = \lambda_1 \lambda_2$, le système $HX = -B$ admet une seule solution X_0 si et seulement si les valeurs propres de H sont non nulles.

Si $\det(H) = 0$ alors l'une des valeurs propres est nulle et l'autre vaut $a + c$ puisqu'on a alors $ac = b^2$ et donc $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - (a + c)\lambda$. Si on note λ_1 la valeur propre non nulle alors $\widetilde{X}'H'X' = \lambda_1 x'^2$ et il n'y a plus qu'un seul terme du second degré.

Si $\det(H) = 0$ le système $HX = -B$ est soit indéterminé (dans ce cas on obtient l'équation d'une conique dégénérée), soit impossible.

Si le système est impossible, on peut prouver qu'il existe X_0 vérifiant l'équation de la conique tel que

$$(HX_0 + B)\widetilde{C}_1 = 0 \text{ si } C_1 \text{ est un vecteur propre correspondant à la valeur propre } \lambda_1 \text{ non nulle.}$$

Remarquons que la droite d'équation $(HX + B)\widetilde{C}_1 = 0$ est une droite de vecteur directeur C_2 puisque $\widetilde{C}_2 C_1 = 0$. De plus, on a $\widetilde{B}C_2 \neq 0$ ce qui permet notamment de prouver que toute droite de vecteur directeur C_2 , vecteur propre correspondant à la valeur propre nulle λ_2 , rencontre la conique en un seul point.

Montrons que $\widetilde{B}C_2 \neq 0$.

D'une part, comme $HC_2 = \lambda_2 C_2$ avec $\lambda_2 = 0$, on a $HC_2 = 0$. D'autre part, le système $HX = -B$ étant impossible, pour tout X_0 on a $HX_0 \neq -B \Leftrightarrow \widetilde{X}_0 H \neq -\widetilde{B}$ et donc $\widetilde{X}_0 HC_2 \neq -\widetilde{B}C_2 \Leftrightarrow 0 \neq -\widetilde{B}C_2$.

Ainsi,

$$\widetilde{B}' = (HX_0 + B)\widetilde{U} = (HX_0 + B)\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2 = ((HX_0 + B)\widetilde{C}_1, (HX_0 + B)\widetilde{C}_2) = (0, \widetilde{X}_0 HC_2 + \widetilde{B}C_2) = (0, \widetilde{B}C_2)$$

$$\text{et } 2\widetilde{B}'X' = 2\widetilde{B}C_2y'.$$

Dès lors, l'équation de la conique s'écrit $\lambda_1 x'^2 + 2\widetilde{B}C_2y' = 0$, équation d'une parabole.