1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 1
Répétitions 1 et 2 (semaines 1 et 2 du second quadrimestre)

Version 26 janvier 2010 (V1 : 23/01/2010)

Préambule

Cette liste concerne
– quelques exercices de rappel
– une introduction à la manipulation des fonctions de plusieurs variables
– l'intégration des fonctions de plusieurs variables

Les fonctions de plusieurs variables apparaissent tout naturellement dans de nombreux domaines. Ainsi par exemple, la distance d'un point de l'espace (muni d'un repère orthonormé) à l'origine s'exprime par

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

si x, y, z sont les coordonnées du point, la loi des gaz parfaits

$$pV = nRT$$

(où p est la pression du gaz (en pascal), V est le volume occupé par le gaz (en mètre cube), n est la quantité de matière (en mole), R est la constante universelle des gaz parfaits et T est la température absolue (en kelvin)) permet d'exprimer la pression (par exemple) en fonction des autres paramètres, ...Les exemples sont donc nombreux et la bonne manipulation (dérivation,intégration, ...) de ces fonctions est indispensable pour bien utiliser les modèles de divers phénomènes (physique, chimiques, biologiques, ...)

Exercices de rappel

1. Déterminer l'aire de la surface du plan dont une représentation analytique est donnée ci-dessous. En la hachurant, représenter cette surface dans le plan muni d'un repère orthonormé.

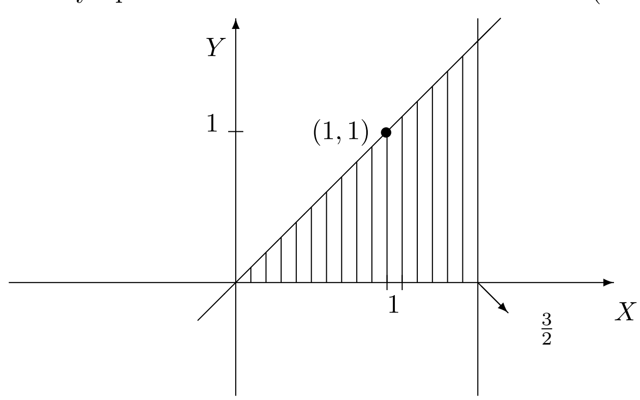
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [0, \pi], \ \sin x \leq y \leq |\cos x|\}$$

2. Pour toutes les valeurs du réel strictement positif r, déterminer la valeur de l'intégrale suivante

$$I(r) = \int_0^r \ln x \ dx.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de r cette intégrale est-elle nulle ? Interpréter graphiquement la réponse.

3. Déterminer une représentation analytique de l'ensemble borné et fermé suivant (hachuré)



Manipulation des fonctions de plusieurs variables

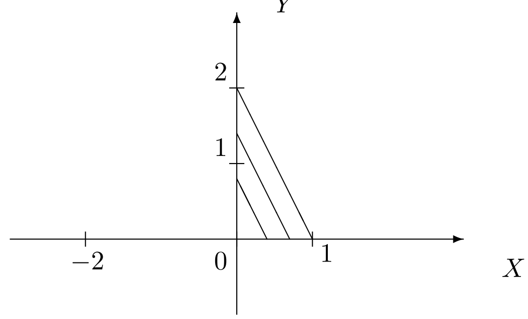
1. Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et le représenter.

$$f(x, y) = \ln\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right), \quad g(x, y) = \sqrt{|x + y| - 1}.$$

2. On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé ; on appelle X, Y, Z les troix axes de celui-ci. Représenter la trace de la surface d'équation cartésienne $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ dans le plan d'équation $z = 0$. Comment appelle-t-on une telle courbe ?

3. On donne la fonction f par
$$f(x,y) = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right).$$
a) Déterminer le domaine de définition et d'infinie dérivabilité de f. Représenter ces domaines.
b) Déterminer l'expression explicite de $|x|D_x f(x,y) + |y|D_y f(x,y)$.
c) Déterminer l'expression explicite de $F(t) = f\left(t, \frac{1}{t}\right)$, le domaine de dérivabilité de cette fonction et l'expression explicite de sa dérivée.
4. On donne f, continûment dérivable sur $]-1,1[\times]-1,1[$. On demande le domaine de dérivabilité de la fonction F définie par $F(x,y) = f(x+y, x-y)$ ainsi que l'expression de ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
5. Déterminer le gradient de la fonction f donnée par $f(x,y,z) = ze^{xy}$.

Calcul intégral

1. a) Calculer l'intégrale de $f(x,y) = y^2\sin(xy)$ sur $A = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,1]$.
b) Calculer l'intégrale de $f(x,y) = x+y$ sur $A = \{(x,y)\ :\ 0 \le y \le \inf\{x, \sqrt{1-x^2}\}\}$.
2. Déterminer la valeur de l'intégrale suivante sur l'ensemble borné fermé hachuré ci-dessous et simplifier la réponse au maximum
$$\int\int_A e^{x+y}\,dxdy$$


3. Soit A une partie du plan (bornée et fermée). Le centre de masse de A (considéré homogène) est défini comme le point de coordonnées (x_A, y_A) où
$$x_A = s^{-1}\int\int_A x\ dx\ dy, \quad y_A = s^{-1}\int\int_A y\ dx\ dy$$
et où s est l'aire de la surface A.
Déterminer la position du centre de masse d'une plaque homogène en forme de demi-cercle de rayon R (R réel strictement positif).
4. Déterminer le volume du corps borné par la surface d'équation cartésienne $z = 4 - x^2 - y^2$ et par le plan des axes X, Y. Donner aussi une représentation graphique de ce corps.
5. Permuter les intégrales et représenter l'ensemble d'intégration dans les cas suivants
$$a)\ \int_{-2}^{2}\left(\int_{-1}^{-x/2} f(x,y)dy\right)dx, \qquad b)\ \int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx\right)dy.$$
6. Calculer l'intégrale de $f(x,y) = x+y$ sur l'ensemble fermé hachuré suivant (et donner une description analytique de cet ensemble)