1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 2
Répétitions 3, 4, 5(en partie ?) (semaines 4, 5 et 6)

Version 8 février 2010 (V1 : 07/02/2010)

Préambule

Cette liste concerne
– l'intégration des fonctions de plusieurs variables réelles
– le calcul matriciel

Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent les matrices. Après modélisation, l'outil « matrices » permet d'effectuer de manière efficace, claire et très gérable, des calculs et estimations qui semblent à priori parfois complexes.

In applied mathematics, the Leslie matrix is a discrete, age-structured model of population growth that is very popular in population ecology. It was invented by and named after P. H. Leslie. The Leslie Matrix (also called the Leslie Model) is one of the best known ways to describe the growth of populations (and their projected age distribution), [...]. [1] En utilisant les matrices, les éléments qui y sont liés (détermimant, valeurs propres, vecteurs propres, ...), on récolte beaucoup d'informations quant à l'évolution de la population modélisée, comme des taux de croissance à long terme, l'estimation de tel ou tel type d'individus après un certain temps, etc

---

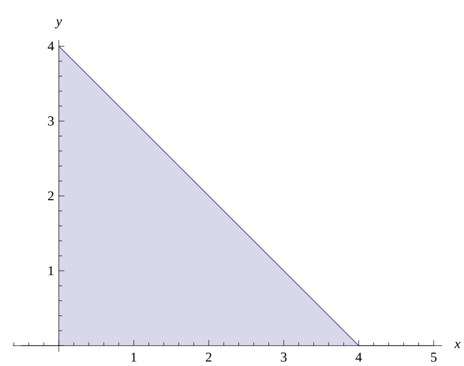
REMARQUES pour cette liste
- Plusieurs exercices ont déja été faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.
- Les exercices avec étoiles doubles sont destinés uniquement aux physiciens et informaticiens
- Les exercices avec étoiles simples sont destinés à tous sauf les biologistes et les géologues.

Calcul intégral

1. * La masse d'une plaque plane est donnée par

$$m = \int\int_R \delta(x,y)dxdy,$$

où $\delta(x,y)$ est la densité au point de coordonnées (x,y). Considérons une plaque plane de la forme d'un triangle isocèle rectangle R dont les côtés égaux mesurent 4 m. Si la densité en un point P est directement proportionnelle au carré de la distance de P au sommet opposé à l'hypothénuse [2], si l'on place l'origine du repère sur ce sommet et si les axes OX et OY sont les prolongations des côtés de même longueur du triangle R,
a) quelle est la masse de cette plaque ?
b) en quelles unités s'exprime la constante K ?



1. Ce texte qui suit est tiré de Wikipedia.
2. c'est-à-dire $\delta(x,y) = K(x^2 + y^2)$ (où K est une constante)

Calcul matriciel

1. Soient les matrices A, B, C données par

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} (1+i)^2 & \frac{1}{i} & (1-i)^3 \\ 1 & i & 1-i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{i}{1+i} & 3 \\ 4i & -i \end{pmatrix}.$$

   Si possible, effectuer les opérations suivantes (et simplifier la réponse au maximum). Si cela ne l'est pas, en expliquer la raison.

$$iC,\ (iB)^*,\ A+B,\ A+\widetilde{B},\ B^*B,\ \widetilde{A}B,\ AB,\ C^2.$$

2. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.

3. (**) Déterminer la forme générale des matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Calculer le plus rapidement possible le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} (i+1)^2 & 1 \\ -2i & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Le déterminant de chacune des matrices suivantes est un polynôme en x. Factoriser ce polynôme en un produit de facteurs du premier degré.

$$\begin{pmatrix} 2-x & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2-x & i \\ i & -x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Calculer (si elle existe) la matrice inverse de chacune des matrices suivantes (on donne $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ -i & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes. Ces matrices sont-elles diagonalisables ? Pourquoi ? Si elles le sont, en déterminer une forme diagonale, ainsi qu'une matrice inversible qui y conduit.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Divers

1. En algèbre linéaire (ou géométrie analytique), une rotation du plan (d'angle θ) est représentée par une matrice du type

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

   où θ est un réel (et représente la mesure de l'angle de la rotation).
   - Pour tout θ, déterminer la matrice produit M_θ^2 et en simplifier les éléments au maximum.
   - Montrer que quels que soient θ, θ', les matrices M_θ et M'_θ commutent. Qu'est-ce que cela signifie en termes de rotations ?

– Montrer que quel que soit le réel θ, la matrice

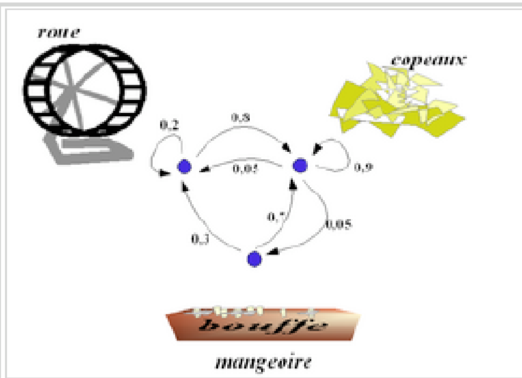
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est aussi une matrice qui représente une rotation.

2. *Doudou le hamster.*

Doudou le hamster paresseux ne connaît que 3 endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou !
- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatigant ; il a donc 80 % de chance de retourner dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué

– Représenter la matrice de transition de ce système
– Prenons l'hypothèse que Doudou dort lors de la première minute de l'étude. Après une minute, quel pourcentage de chance a-t-on que Doudou dorme encore ? (resp. que Doudou mange ? , que Doudou coure ?)
– (**) Avec ce modèle, à long terme, combien de temps pourra-t-on dire que Doudou a passé à dormir ?



exemple avec boucles dessinées