1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

Exercices de mathématique, second quadrimestre
Liste type numéro 3
Répétitions 5(en partie ?), 6 (semaines 6, 7)

Version 3 mars 2010 (V1 : 02/03/2010)

Préambule Cette liste concerne les **approximations polynomiales.**

*****

Qu'entend-on par approximation polynomiale d'une fonction dans le cas où celle-ci est suffisamment dérivable ?

Comment introduire ces approximations à partir des connaissances actuelles ?

A quoi peuvent servir ces approximations ?

*****

Le *théorème des accroissements finis* pour une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ s'exprime de la manière suivante : quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir de sa valeur en a suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x - a)Df(\xi).$$

Ceci peut s'interpréter en disant que l'erreur commise en approchant la valeur de f en x par sa valeur en a est proportionnelle à l'écart entre les deux points (a et x) et à la dérivée de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Lorsque la fonction est plus régulière, ce résultat peut être étendu de la manière suivante (*c'est ce que l'on appelle le développement limité de Taylor*). Si f est p fois dérivable dans I, alors quels que soient les réels a et x de cet intervalle, il en existe un autre (notons-le ξ) situé entre a et x, tel que la valeur de la fonction en x s'exprime à partir des valeurs en a de ses $p-1$ premières dérivées suivant l'égalité suivante

$$f(x) = f(a) + (x - a)Df(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi).$$

La fonction P définie par

$$P(t) = f(a) + (t - a)Df(a) + \ldots + \frac{(t-a)^{p-1}}{(p-1)!}D^{p-1}f(a), \quad t \in \mathbb{R}$$

est un polynôme de degré au plus $p - 1$ en la variable t. Le développement limité de Taylor ci-dessus s'écrit ainsi

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-a)^p}{p!}D^p f(\xi)$$

et nous dit que la valeur de f en x est approchée par la valeur en x de ce polynôme, l'erreur commise étant proportionnelle à l'écart entre la p^e puissance de l'écart entre a et x et à la dérivée d'ordre p de la fonction f calculée en un réel intermédiaire entre a et x.

Si a est fixé et que la dérivée d'ordre p de f est continue en a, alors on en déduit que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^p} = 0.$$

Ceci exprime de façon précise la manière dont le polynôme approche la fonction au voisinage de a. Voir cours pour plus de détails.

Ce genre de résultat est très utile quand il s'agit d'obtenir une estimation de grandeurs physiques.

Ainsi par exemple, la force de marée agissant sur une masse m peut être définie comme la différence de l'attraction de la Lune sur cette masse située à la surface de la Terre et de l'attraction de la Lune sur cette masse en supposant qu'elle est au centre de la Terre. Si on désigne par R le rayon terrestre, d la distance[1] Terre-Lune, G la constante de gravité, M la masse de la Lune, on peut alors écrire

$$F = \frac{GMm}{(d-R)^2} - \frac{GMm}{d^2}$$

en un point de la surface terrestre situé sur la droite joignant le centre de la Terre et le centre de la Lune. En tenant compte du fait que le rapport R/d est petit, une expression approximative (simplifiée) de la force F est donnée par

$$F^{Approx} = \frac{2GMmR}{d^3}.$$

1. entre les centres respectifs

Exercice après lecture du préambule

Expliquer pourquoi une approximation de F est donnée par l'expression précédente.

REMARQUE pour cette liste
- Plusieurs exercices seront faits ou suggérés aux cours et s'ajoutent donc à ceux-ci.
- Les exercices avec étoiles doubles sont destinés uniquement aux physiciens et informaticiens
- Les exercices avec étoiles simples sont destinés à tous sauf les biologistes et les géologues
- Il y aura une liste supplémentaire (approximations, séries, ...) pour les physiciens, chimistes, informaticiens, géographes, géologues.

Exercices

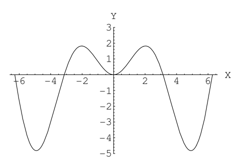
1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre n en x_0 pour la fonction f_k. Représenter f_2 (—-ou f_3 ou f_5—) et ses approximations.

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \cos x\ e^x,\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2, 3 & f_2(x) = \sqrt{1-x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\ f_3(x) = \dfrac{1}{1+x},\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2 & f_4(x) = \mathrm{arctg} x,\ x_0 = 0, n = 0, 1, 2 \\ f_5(x) = \cos^2 x,\ x_0 = 0,\ n = 0, 1, 2 & f_6(x) = \cos x,\ x_0 = 1, n = 0, 1, 2 \end{array}$$

2. a) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre 3 en 0 de la fonction cos et en estimer le reste. Représenter la fonction et cette approximation dans le même repère orthonormé.

   b) (*) Déterminer l'approximation polynomiale en 0 à l'ordre 1 et à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = x \sin x,\ x \in \mathbb{R}$. Représenter graphiquement ces approximations dans le même repère orthonormé que celui où f est représenté (cf ci-dessous), en justifiant les positions relatives des courbes.

   (Suggestion : $|\sin x| \leq |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$.)



3. (**) Déterminer l'approximation polynomiale à l'ordre $0, 1, 2, 3$ en 0 des fonctions données par [2]

$$g_1(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right), \quad g_2(x) = \frac{-3x+2}{2x^2-3x+1}.$$

4. (**) Un tunnel d'une longueur l relie deux points de la surface de la Terre. Si R désigne le rayon de la Terre, déterminer une approximation de la profondeur maximale de ce tunnel.

---

2. *Suggestion.* Utiliser le développement de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$; décomposer en fractions simples