1, 2, 3...Sciences

Année académique 2009-2010

MATHÉMATIQUE, SECOND QUADRIMESTRE
COMPLÉMENTS AUX NOTES DE COURS

Version 8 mars 2010 (V1 : 05/03/2010)

Matrices dites « stochastiques »

La référence dans les notes de cours est le chapitre consacré au calcul matriciel, plus précisément aux quelques applications présentées à la fin de celui-ci (*Chaînes de Markov*).

Définitions

Une *matrice stochastique* est une matrice carrée dont les éléments sont positifs et telle que la somme des éléments de chaque colonne soit égale à 1. Elle est dite régulière si ses éléments sont tous strictement positfs.

Un *vecteur de probabilité* est un vecteur dont les éléments sont positifs et de somme égale à 1.

Propriétés

1. Si T est une matrice stochastique et X un vecteur de probabilité, alors le vecteur TX est encore un vecteur de probabilité.
2. Une matrice stochastique possède toujours la valeur propre 1.
3. Si une matrice stochastique est régulière, la valeur propre 1 est de multiplicité 1 et il existe un unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre de valeur propre 1.
4. Si la matrice stochastique T est régulière, alors pour toute condition initiale X (vecteur de probabilité), la suite $T^k X$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ converge vers l'unique vecteur de probabilité qui soit un vecteur propre de valeur propre 1.

Preuve. La propriété 1) se démontre par un calcul direct.

2) Pour bien visualiser la propriété 2, traitons tout d'abord le cas des matrices de dimension 2. Soit

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$$

avec $a, b \in [0, 1]$. On a

$$T - I = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix}$$

donc les lignes sont multiples l'une de l'autre et par conséquent le déterminant est nul.

Pour une matrice stochastique T de dimension quelconque, cette propriété se démontre de la même manière. De fait, les lignes de la matrice $T - I$ sont des vecteurs dont la somme est nulle. Les lignes sont donc des vecteurs linéairement dépendants. Dès lors le déterminant de $T - I$ est nul, ce qui indique que 1 est bien valeur propre de T.

3) Traitons le cas des matrices de dimension 2. Un calcul direct montre que les valeurs propres de T sont en fait 1 et $a - b$ et, vu l'hypothèse, $a - b$ n'est pas égal à 1. Les vecteurs propres relatifs à la valeur propre 1 sont les vecteurs non nuls $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que

$$\begin{pmatrix} a-1 & b \\ 1-a & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix} \quad r \in \mathbb{C}_0.$$

Il s'ensuit que le vecteur

$$\frac{1}{1-a+b} \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$$

est un vecteur de probabilité qui est vecteur propre de valeur propre 1.

Pour terminer, il reste à montrer que ce vecteur est unique. De fait, si V est un vecteur de probabilité qui est vecteur propre relatif à la valeur propre 1, il existe un réel non nul r tel que

$$V = r \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}.$$

Comme $rb + r(1-a) = 1$, nécessairement $r = \frac{1}{1-a+b}$.

4) Traitons le cas des matrices de dimension 2 et reprenons les notations précédentes. Désignons par X_0 le vecteur propre de probabilité relatif à la valeur propre 1 et désignons par Y un vecteur propre relatif à la valeur propre $a-b$. Si X est un vecteur quelconque, alors il existe des complexes c, c' tels que

$$X = cX_0 + c'Y.$$

On applique alors successivement la matrice T aux deux membres de l'égalité et on obtient ainsi

$$T^k X = cX_0 + c'(a-b)^k Y$$

quel que soit le naturel k. Comme $|a-b| < 1$, on en déduit que la suite $T^k X$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ converge vers cX_0. Pour conclure, il reste donc à montrer que $c = 1$. De fait, si on désigne par α, β les éléments de Y, et par x_0, y_0 les élements de X_0, comme $T^k X$ est un vecteur de probabilité quel que soit k, on a

$$c(x_0 + y_0) + c'(a-b)^k(\alpha + \beta) = 1, \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Comme la suite $(a-b)^k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ converge vers 0 et comme $x_0 + y_0 = 1$, on en déduit que $c = 1$ et on conclut.