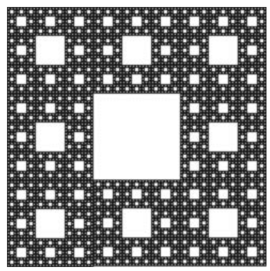
Exercices divers : révisions

1. Etudier la convergence des séries suivantes

$$1)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\ln(m)}{m^2} \qquad\qquad 2)\ \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\exp(m)}{m^2}$$

2. The construction of the Sierpinski carpet begins with a square$R$ (side of length 1). The square is cut into 9 subsquares of equal area, in a 3-by-3 grid, and the central subsquare is removed. The same procedure is then applied recursively to the remaining 8 subsquares, ad infinitum. Let R_n be the region that remains after performing the operation n times. The Sierpinski carpet $\mathcal{S}$ consists of all points in R that are not removed by any of the operations ; in other words, it consists of all points which are in R_n, for every n.
Find the area A_n *of* R_n *for any* n.
Show that $\lim_{n\to+\infty} A_n = 0$ (ce qui entraîne que la surface de la « carpette » est nulle !).



3. Depuis le sol, on lance une petite fusée. Elle consomme un quart de son carburant initial durant les 1000 premiers kilomètres, puis un neuvième durant les 1000 km suivants, etc ; bref, en toute généralité, elle consomme une part de $1/(n+1)^2$ de son carburant initial durant la n^e tranche de 1000 km.
Dans ces conditions, tout le carburant sera-t-il jamais épuisé ?

Remarque : il s'agit en fait de montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$
Suggestion : pour tout naturel strictement positif n, on a $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$. Considérer la série sous la forme $\displaystyle\frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

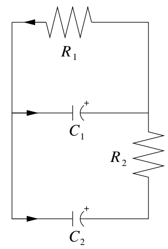
4. *Demi-vie d'une substance*
Dans des contextes précis, la « demi-vie » est le temps mis par une substance (médicament, noyau radio-actif, ou autres) pour perdre la moitié de son activité pharmacologique, physiologique ou radioactive.

Une substance radioactive se décompose à un rythme proportionnel à la quantité présente de cette substance. S'il a fallu trois jours pour que sa masse diminue de 15%, déterminer la demi-vie de la substance.

5. *Diagonalisation et équations différentielles*
Dans le circuit électrique suivant, l'évolution au cours du temps des différences de potentiels V_1 et V_2 aux bornes des capacités est décrite par l'équation différentielle (matricielle) suivante

$$\begin{pmatrix} DV_1(t) \\ DV_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-(R_1+R_2)}{C_1R_1R_2} & \frac{1}{C_1R_2} \\ \frac{1}{C_2R_2} & \frac{-1}{C_2R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix}$$

Supposons que les résistances R_1 et R_2 sont respectivement de $\frac{1}{2}\Omega$ et de 1Ω et que les capacités C_1 et C_2 sont respectivement de $2F$ et de $1F$. Supposons également qu'initialement, il y a une différence de potentiel de $5V$ dans la capacité C_1 et de $4V$ dans la capacité C_2.



Décrire l'évolution de V_1 et V_2 au cours du temps.

SOLUTIONS

Exercice 1
La première série converge et la deuxième diverge.

Exercice 2
On a $A_n = 1 - \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{8}{9}\right)^k$ mais aussi $A_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$. Prouver l'égalité de ces 2 expressions.

Exercice 3
On a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{3}{4}$; le carburant n'est donc jamais complètement épuisé.

Exercice 4
La demi-vie vaut $\pm 12,8$ jours.

Exercice 5
Au cours du temps, l'évolution de V_1 et V_2 est donnée par $V_1(t) = 3e^{-t/2} + 2e^{-2t}$ et $V_2(t) = 6e^{-t/2} - 2e^{-2t}$