Révisions relatives aux fonctions de plusieurs variables

---

1. Soit $f : (x,y) \mapsto \ln\left(\dfrac{xy-1}{4x^2+y^2-4}\right)$.

   a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de cette fonction et les représenter dans un repère orthonormé en les hachurant.
   b) Déterminer la dérivée de f par rapport à sa seconde variable en un point de son domaine de dérivabilité.

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, représenter la surface d'équation $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$.

3. Soit $f : (x,y) \mapsto \operatorname{arctg}(2x+y)$.
   a) Déterminer son domaine de dérivabilité.
   b) Si c'est possible, calculer, par application de la définition de la dérivée d'une fonction en un point, la dérivée partielle de f par rapport à sa première variable au point de coordonnées $(1,3)$.

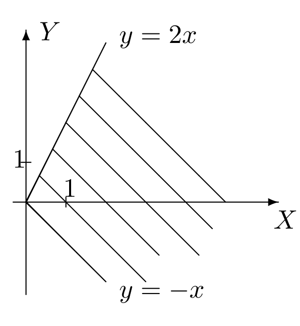
4. Soit f une fonction de deux variables réelles continûment dérivable sur $]-1,1[\times]0,+\infty[$.
   On considère la fonction $F : (x,y) \mapsto f(x^2+y^2, xy)$.
   a) Où la fonction F est-elle dérivable ? Donner une représentation graphique de l'ensemble.
   b) En un point de son domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée partielle de F par rapport à sa seconde variable en fonction des dérivées partielles de f.

5. Soit f une fonction de deux variables réelles continûment dérivable sur $]\frac{1}{2},2[\times]-1,+\infty[$.
   On considère la fonction $F : t \mapsto f(\cos^2(t), \ln(t))$.
   a) Où la fonction F est-elle dérivable ?
   b) En un point de son domaine de dérivabilité, déterminer la dérivée de F en fonction des dérivées partielles de f.

6. Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 0,\ x-y \leq 0,\ y \leq \frac{\pi}{8}\}$.
   a) Donner une représentation graphique de A en le hachurant.
   b) Si c'est possible, calculer $I = \displaystyle\int\int_A \frac{1}{\cos^2(x+y)}\, dx\, dy$

7. Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble
   $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 4\}.$$
   a) Donner une représentation graphique de A en le hachurant.
   b) Si c'est possible, calculer $I = \displaystyle\int\int_A \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy$

8. On donne la partie du plan hachurée ci-dessous (ensemble fermé non borné), notée A, et la fonction $f : (x,y) \mapsto e^{-x^2}$. Si c'est possible, calculer $I = \displaystyle\int\int_A f(x,y)\, dx\, dy$.



9. Permuter les intégrales et représenter graphiquement l'ensemble d'intégration si $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{3-2y} f(x,y)\, dx\right) dy$.