

Résolution du TD du 4 décembre 2009

Françoise Bastin, Francine Monjoie-Garnir, Thomas Belligoi

7 décembre 2009

1. (a) Soit la courbe $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x, x \in [0, 1]\}$.

Un paramétrage régulier de la courbe est donné par $\vec{\gamma}(x) = [x, \cosh x]$ et, de là, $D\vec{\gamma}(x) = [1, \sinh x]$. Ainsi, la longueur de la courbe est égale à

$$\begin{aligned} L_\Gamma &= \int_0^1 \|D\vec{\gamma}(x)\| dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 x} dx \\ &= \int_0^1 \cosh x dx \\ &= \sinh 1 \end{aligned}$$

- (b) Un paramétrage de la surface $\mathcal{S}$ est donné par $\vec{\varphi}(r, \theta) = [r \cos \theta, r \sin \theta, r]$ avec $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Une normale à cette surface est donnée par $\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta}$. Comme

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} = [\cos \theta, \sin \theta, 1], \quad \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} = [-r \sin \theta, r \cos \theta, 0]$$

on a

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} = [-r \cos \theta, -r \sin \theta, r]$$

Puisque la troisième composante est positive, cette normale est orientée dans le sens des z positifs et la normale unitaire correspondante est

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial \theta} \right\|}.$$

Le flux passant à travers la surface $\mathcal{S}$ est ainsi égal à

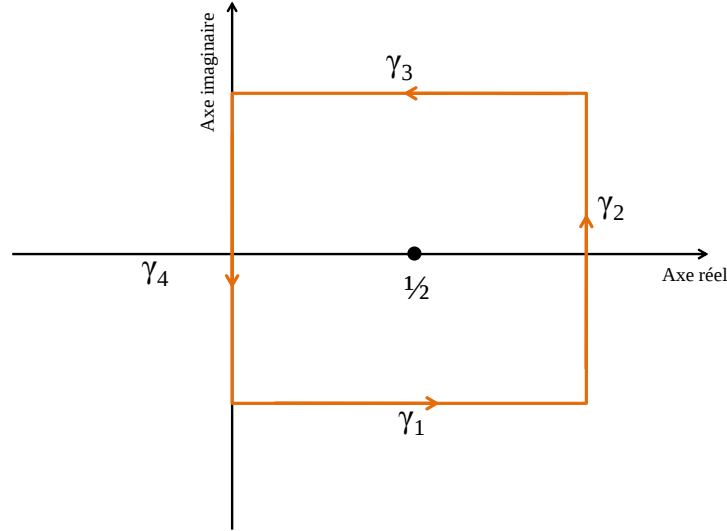
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \bullet \vec{n} d\sigma &= \int \int_{[0,1] \times [0,2\pi]} \vec{f}(r \cos \theta, r \sin \theta, r) \bullet \left(\frac{\partial \vec{\varphi}(r, \theta)}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{\varphi}(r, \theta)}{\partial \theta} \right) dr d\theta \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta (-r^2 \sin \theta \cos \theta - r^2 \cos \theta \sin \theta + r^3) \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta (-2r^2 \sin \theta \cos \theta + r^3) \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta (-r^2 \sin 2\theta + r^3) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2. (a) Les fonctions $z \mapsto e^{1/z^2}$ et $z \mapsto ze^{1/z^2}$ étant holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, les intégrales demandées valent, selon le théorème des résidus, $2\pi i$ multiplié par le résidu en 0.

Puisque $e^{1/z^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{z^{2m}}$, le coefficient a_{-1} de $\frac{1}{z}$ est nul donc le résidu en 0 est nul et l'intégrale l'est également.

De la même façon, $ze^{1/z^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{1}{z^{2m-1}}$, le coefficient a_{-1} correspond à $m = 1$ et vaut 1. Ainsi, le résidu en 0 vaut 1 et l'intégrale est égale à $2\pi i$.

- (b) Soit γ le bord du carré centré en $1/2$, de côtés parallèles aux axes et de longueur 1.



Ce bord est constitué de la juxtaposition de quatre chemins (qui sont des segments de droites), $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ avec

- $\gamma_1(t) = t - \frac{i}{2}, t \in [0, 1]$,
- $\gamma_2(t) = 1 + it, t \in [-1/2, 1/2]$,
- $(-\gamma_3)(t) = t + \frac{i}{2}, t \in [0, 1]$,
- $(-\gamma_4)(t) = it, t \in [-1/2, 1/2]$.

On considère d'abord la fonction $f(z) = \bar{z}$. On a

- $\int_{\gamma_1} \bar{z} dz = \int_0^1 (t + \frac{i}{2}) dt = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$,
- $\int_{\gamma_2} \bar{z} dz = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - it) i dt = i + \frac{1}{4}$,
- $\int_{\gamma_3} \bar{z} dz = - \int_0^1 (t - \frac{i}{2}) dt = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$,
- $\int_{\gamma_4} \bar{z} dz = - \int_{-1/2}^{1/2} -it i dt = -\frac{1}{4}$.

Ainsi on obtient

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} \bar{z} dz = 2i$$

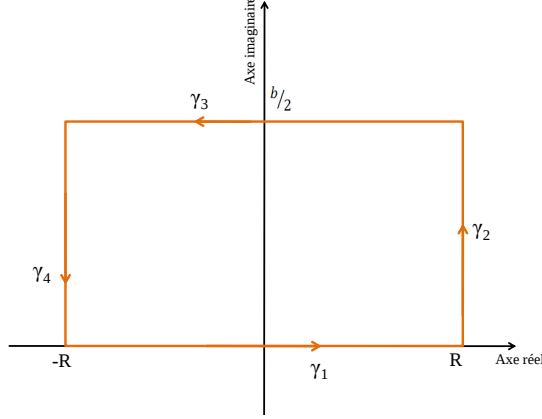
Si on considère à présent la fonction $f(z) = (\Re z)^2$, il vient successivement

- $\int_{\gamma_1} (\Re z)^2 dz = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$,
- $\int_{\gamma_2} (\Re z)^2 dz = \int_{-1/2}^{1/2} 1 i dt = i$,
- $\int_{\gamma_3} (\Re z)^2 dz = - \int_0^1 t^2 dt = -\frac{1}{3}$,
- $\int_{\gamma_4} (\Re z)^2 dz = - \int_{-1/2}^{1/2} 0 dt = 0$.

Ainsi on obtient

$$\int_{\gamma} (\Re z)^2 dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} (\Re z)^2 dz = i$$

3. Soit $\mathcal{C}_R$ le chemin constitué par les bords du rectangle $[-R, R] \times [0, b/2]$, avec $R > 0$.



La fonction $z \rightarrow e^{-z^2}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$; ainsi, quel que soit $R > 0$ on a

$$\int_{\mathcal{C}_R} e^{-z^2} dz = 0 \quad (*)$$

Cela étant, le bord du rectangle est constitué des chemins $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ avec

- $\gamma_1(t) = t, t \in [-R, R]$,
- $\gamma_2(t) = R + it, t \in [0, b/2]$,
- $(-\gamma_3)(t) = t + ib/2, t \in [-R, R]$,
- $(-\gamma_4)(t) = -R + it, t \in [0, b/2]$

et on a

- $\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-t^2} dt$,
- $\int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz = \int_0^{b/2} e^{-(R+it)^2} i dt$,
- $\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = - \int_{-R}^R e^{-(t+ib/2)^2} dt = - \int_{-R}^R e^{-(t+ib/2)^2} dt$,
- $\int_{\gamma_4} e^{-z^2} dz = - \int_0^{b/2} e^{-(-R+it)^2} i dt = - \int_0^{b/2} e^{-(-R+it)^2} i dt$.

Pour les chemins γ_1 et γ_3 on a

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz &= - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ib/2)^2} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 + b^2/4 - ibt} dt \\ &= -e^{b^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(bt) dt. \end{aligned}$$

Si on note que

$$\left| \int_0^{\frac{b}{2}} e^{-(R+it)^2} i \, dt \right| \leq \int_0^{\frac{b}{2}} e^{-R^2+t^2} \, dt \leq e^{-R^2} \int_0^{\frac{b}{2}} e^{t^2} \, dt = \text{constante} \cdot e^{-R^2}$$

on obtient

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} \, dz \right| = 0.$$

De façon analogue,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\gamma_4} e^{-z^2} \, dz \right| = 0.$$

Dès lors, à partir de (*) et de ce qui précède, on obtient

$$\sqrt{\pi} - e^{b^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(bt) \, dt = 0$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(bt) \, dt = \sqrt{\pi} e^{-b^2/4}.$$

4. (a) La fonction $\theta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}-\cos \theta}$ est définie et continue sur le fermé borné $[0, 2\pi]$, elle y est donc intégrable.

Puisque $\cos \theta$ s'exprime sous la forme $\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5}-\cos \theta} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5}-\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{2 \, d\theta}{2\sqrt{5}-e^{i\theta}-e^{-i\theta}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2e^{i\theta} \, d\theta}{2\sqrt{5}e^{i\theta}-e^{2i\theta}-1} \\ &= 2i \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2-2\sqrt{5}z+1} \end{aligned}$$

avec $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Seul le zéro $z = \sqrt{5} - 2$ du dénominateur se situe à l'intérieur du cercle de rayon 1 centré à l'origine. Ainsi, d'après le théorème des résidus, on obtient

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5}-\cos \theta} = -4\pi \text{Rés}_{\sqrt{5}-2} \left(\frac{1}{z^2-2\sqrt{5}z+1} \right) = -4\pi \left[\frac{1}{2z-2\sqrt{5}} \right]_{z=\sqrt{5}-2} = \pi$$

- (b) La fonction $x \rightarrow \frac{1}{1+x^6}$ est continue sur $\mathbb{R}$, est paire et vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^6} = 0$; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^6} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} \, dx$$

On pose $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$.

Les racines sixièmes de $-1 = e^{i\pi}$ sont $z_k = e^{\frac{i\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. La fonction f est donc holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$. De plus, on a

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^6} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz$$

où Γ_R est le chemin $\Gamma_R(t) = t$, $t \in [-R, R]$.

Cela étant, un paramétrage du chemin C_R constitué de la demi-circonférence centrée à l'origine, de rayon R , dont les points ont une ordonnée positive et parcourue dans le sens trigonométrique est $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Le chemin fermé γ_R constitué par la juxtaposition de Γ_R et de C_R étant homotope à un chemin constant dans $\mathbb{C}$, le théorème des résidus donne, quel que soit $R > 1$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z) dz &= 2i\pi ((Res)_{z_0} f + (Res)_{z_1} f + (Res)_{z_2} f) \\ &= 2i\pi \left(\frac{1}{6e^{\frac{5i\pi}{6}}} + \frac{1}{6e^{\frac{5i\pi}{2}}} + \frac{1}{6e^{\frac{25i\pi}{6}}} \right) = \frac{i\pi}{3} \left(e^{\frac{-5i\pi}{6}} + e^{\frac{-5i\pi}{2}} + e^{\frac{-25i\pi}{6}} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

On a aussi

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \frac{1}{R^6 - 1} \rightarrow 0 \quad \text{si } R \rightarrow +\infty.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{\pi}{3}$$

5. Fonction f_1

La fonction f_1 est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, c'est-à-dire dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

La singularité isolée $z = 0$ est un pôle simple car $\lim_{z \rightarrow 0} z f_1(z) = 1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et le résidu est la valeur de cette limite.

En utilisant le développement de Taylor de la fonction sinus, le développement de Laurent de la fonction f_1 est alors

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!}$$

On en déduit donc que

$$H(Z) = Z, \quad h(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k-1}}{(2k+1)!}$$

Fonction f_2

La fonction f_2 est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, c'est-à-dire dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

Les singularités isolées sont i , $-i$ et ce sont des pôles simples car ce sont des zéros simples du dénominateur et le numérateur ne s'y annule pas. On obtient aussi

$$Res_i f_2 = \left[\frac{e^{z^2+1}}{2z} \right]_{z=i} = -\frac{i}{2}, \quad Res_{-i} f_2 = \frac{i}{2}$$

On a

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$$

donc

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2+1} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z^2+1)^{m-1}}{m!} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z^2+1)^{m-1}}{m!}$$

Au voisinage de i , on a donc

$$h(z) = -\frac{1}{2i(z+i)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z^2+1)^{m-1}}{m!}, \quad H(Z) = \frac{1}{2i}Z$$

et, au voisinage de $-i$, on a

$$h(z) = \frac{1}{2i(z-i)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(z^2+1)^{m-1}}{m!}, \quad H(Z) = -\frac{1}{2i}Z$$

Fonction f_3

La fonction f_3 est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, c'est-à-dire des complexes $ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Les singularités isolées $z = ik\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sont des pôles simples (zéros simples du dénominateur et le numérateur non nul). Le résidu en chacun de ces pôles simples est donné par

$$Res_{ik\pi} = \left[\frac{\sin z}{D \sin iz} \right]_{z=ik\pi} = \left[\frac{\sin z}{i \cos iz} \right]_{z=ik\pi} = \frac{\sin ik\pi}{i \cos(ik\pi)} = \frac{i \sinh k\pi}{i \cos k\pi} = (-1)^k \sinh k\pi$$