ANALYSE II, 2009-2010, 2e bachelier ingénieur civil
Examen du 16 août 2010— Solutions
Version: August 30, 2010 (V1: 18 août 2010)

THEORIE

Question 1
1.1) Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Enoncer et démontrer ce que l'on appelle "formule de représentation intégrale de Cauchy pour f et ses dérivées". Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.

1.2) Enoncer le résultat donnant le développement en série de puissances d'une fonction holomorphe dans un ouvert (développement de Taylor). Les hypothèses de validité et les notations employées doivent être clairement exprimées.

Solution. Voir cours mais aussi les corrigés des examens des années précédentes.

Question 2
Donner la définition de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable dans $\mathbb{R}$. Enoncer ensuite le théorème de Fourier (pour une fonction intégrable de transformée intégrable) en exprimant toutes les transformées de Fourier explicitement (c'est-à-dire sous forme d'intégrale, en repassant à la définition).

Solution. Voir cours mais aussi les corrigés des examens d'août 2009 et de 2007.

EXERCICES

Question 1 **Avec des notations qu'il conviendra de préciser, la formule de Stokes s'écrit**

$$\int\int_{\mathcal{S}} rot(\vec{f}) \bullet \vec{n}\ d\sigma \;=\; \int_{\mathcal{C}} \vec{f} \bullet \vec{t}\ ds$$

Cela étant, on donne la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z - 1 = 0$ et la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z) = [y, z, x]$. Si $\mathcal{S}$ désigne la partie de cette surface correspondant aux points dont la troisième coordonnée est positive, on demande de vérifier la formule de Stokes correspondant à ces données (en n'oubliant pas de préciser la définition des divers éléments intervenant dans les deux intégrales).

Solution. D'une part, un paramétrage injectif et régulier de $\mathcal{S}$ est donné par

$$\vec{\phi}(r,t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 1 - r^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi[, r \in]0, 1].$$

Il s'ensuit qu'un vecteur normal à $\mathcal{S}$ au point de paramètres r, t est

$$\vec{N}(r,t) = D_r\vec{\varphi}(r,t) \wedge D_t\vec{\varphi}(r,t) = [2r^2\cos t, 2r^2\sin t, r].$$

Le vecteur normé que $\vec{N}$ définit est orienté "dans le sens extérieur" à la surface et détermine une orientation de celle-ci dont il faudra tenir compte pour orienter la courbe bordant $\mathcal{S}$; le vecteur normal unitaire correspondant est

$$\vec{n}(r,t) = \frac{\vec{N}(r,t)}{\|\vec{N}(r,t)\|} = \frac{[2r^2\cos t, 2r^2\sin t, r]}{\|\vec{N}(r,t)\|}.$$

D'autre part, le rotationnel de la fonction vectorielle $\vec{f}$ est constant et a pour composantes $[-1, -1, -1]$ en tout point. En utilisant la définition de l'intégrale sur une surface, on obtient ainsi

$$\int\int_{\mathcal{S}} rot(\vec{f}) \bullet \vec{n}\ d\sigma \;=\; \int\int_{[0,2\pi]\times[0,1]} \frac{-2r^2\cos t - 2r^2\sin t - r}{\|\vec{N}(r,t)\|}\ \|\vec{N}(r,t)\|\ dtdr$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\int_{[0,2\pi]\times[0,1]} (-2r^2\cos t - 2r^2\sin t - r)\ dtdr \\
&= -\int\int_{[0,2\pi]\times[0,1]} r\ dtdr - 2\left(\int_0^1 r^2\ dr\right)\ \left(\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t)dt\right) \\
&= -\int\int_{[0,2\pi]\times[0,1]} r\ dtdr \\
&= -2\pi\int_0^1 r\ dr \\
&= -\pi
\end{aligned}
$$

D'autre part, la courbe $\mathcal{C}$ qui borde $\mathcal{S}$ et orientée dans le "sens du tire-bouchon" relativement à l'orientation de la surface a pour représentation paramétrique (injective et régulière)

$$\vec{\gamma}(\theta) = [\cos\theta, \sin\theta, 0], \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

Le vecteur tangent unitaire orienté correspondant est

$$\vec{t}(\theta) = \frac{D_\theta\vec{\gamma}(\theta)}{\|D_\theta\vec{\gamma}(\theta)\|} = [-\sin\theta, \cos\theta, 0].$$

Puisque $\vec{f}(\vec{\gamma}\,(\theta)) = [\sin\theta, 0, \cos\theta]$, en utilisant la définition de l'intégrale sur une courbe, on obtient ainsi

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{f}\bullet\vec{t}\ ds \ = \ \int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta + 0 + 0)\ d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{\cos(2\theta)-1}{2}\ d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\ d\theta = -\pi$$

ce qui est bien la valeur trouvée pour le premier membre de l'égalité de l'énoncé.

Question 2

2.1) On donne les fonctions f et g par

$$f(z) = \frac{\sin(iz)}{z^2}, \quad g(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$$

a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes?
b) Quels sont leurs zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
c) Quelles sont les singularités isolées? De quels types sont-elles?
d) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
e) Pour f, déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées.

Solution.

Cas de la fonction f.

a) La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en 0 car $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\sin(iz)}{z}\ \frac{1}{z}\right) = \infty$.

b) Les zéros de f sont les zéros de la fonction $z \mapsto \sin(iz)$ à l'exception de 0, à savoir les complexes $z_m = im\pi,\ m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Chacun de ces zéros est un zéro simple du numérateur car $D\sin(iz) = i\cos(iz)$ ne s'y annule pas. On peut donc écrire (avec F_m holomorphe dans $\mathbb{C}$):

$$f(z) = (z - z_m)\frac{F_m(z)}{z^2}, \quad \frac{F_m(z_m)}{z_m^2} \neq 0$$

ce qui indique que z_m est un zéro de multiplicité 1 pour f.

c) La seule singularité isolée de f est 0 et c'est un pôle d'ordre 1 car

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(iz)}{z} = i\lim_{z\to 0}\frac{\sin(iz)}{iz} = i \neq 0.$$

d) Le résidu en le pôle 0 d'ordre 1 est

$$Res_0 f = \lim_{z\to 0} zf(z) = i.$$

e) Le développement de Taylor de la fonction sinus en 0 est

$$\sin z = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}, \ z \in \mathbb{C}.$$

On a donc

$$f(z) = i \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^{2m-1}}{(2m+1)!}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Le développement de Laurent demandé est donc

$$f(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z}\right)$$

avec

$$h(z) = i \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{z^{2m-1}}{(2m+1)!} = \frac{\sin(iz) - iz}{z^2}, \quad H(Z) = iZ.$$

<u>Cas de la fonction</u> g.

a) La fonction g est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, à savoir dans $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ et ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en 0 car

$$\lim_{z \to i} g(z) = \lim_{z \to i} e^{iz} \ \lim_{z \to i} \frac{1}{1+z^2} = e^{-1} \ \lim_{z \to i} \frac{1}{1+z^2} = \infty$$

et de même pour la limite en $-i$.

b) La fonction g n'a pas de zéro car la fonction exponentielle (numérateur) n'a pas de zéro.

c) Les singularités isolées de g sont i et $-i$. Il s'agit de pôles d'ordre 1 car

$$\lim_{z \to i} (z-i)g(z) = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-1}}{2i} = -\frac{i}{2e} \neq 0$$

et

$$\lim_{z \to -i} (z+i)g(z) = \lim_{z \to -i} \frac{(z+i)e^{iz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e}{-2i} = \frac{ie}{2} \neq 0$$

d) Les résidus en les pôles d'ordre 1 sont donnés par

$$Res_i g = \lim_{z \to i} ((z-i)g(z)) = -\frac{i}{2e}, \quad Res_{-i} g = \lim_{z \to -i} ((z+i)g(z)) = \frac{ie}{2}.$$

2.2) Soit γ la circonférence centrée en $2i$ et de rayon 1. On considère qu'on parcourt cette circonférence "aire à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif. Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\int_\gamma \overline{z} \ dz, \ \int_\gamma \frac{1}{z^2} \ dz, \ \int_\gamma \frac{1}{2z-3i} \ dz, \ \int_\gamma \frac{\sin(i\pi z)}{2z-3i} \ dz$$

Solution. Utilisons le paramétrage $\gamma(t) = 2i + e^{it}, \ t \in [0, 2\pi[$ de la circonférence. Posons

$$z_0 = 2i, \quad r = 1.$$

Comme la fonction $z \mapsto \overline{z}$ est continue dans $\mathbb{C}$, l'application de la définition de l'intégrale curviline donne

$$\int_\gamma \overline{z} \ dz = \int_0^{2\pi} \left(-2i + e^{-it}\right) \ ie^{it} \ dt = \int_0^{2\pi} \left(2e^{it} + i\right) \ dt = i \int_0^{2\pi} i \ dt = 2i\pi.$$

Comme la fonction $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ est holomorphe dans le complémentaire de l'origine et que le chemin γ est homotope à un chemin constant dans cet ouvert, le théorème d'invariance par homotopie donne directement

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2} \ dz = 0.$$

On a

$$\frac{1}{2z-3i} = \frac{1}{2(z-z_1)} \quad \text{et} \quad \frac{\sin(i\pi z)}{2z-3i} = \frac{\sin(i\pi z)}{2(z-z_1)}$$

avec $z_1 = \frac{3i}{2}$ et $|z_1 - z_0| = \frac{1}{2} < r = 1$. Ainsi, en appliquant la formule de représentation intégrale de Cauchy[4] à la fonction constante 1 et à la fonction $z \mapsto \sin(i\pi z)$, toutes les deux holomorphes dans $\mathbb{C}$, on obtient

$$\int_\gamma \frac{1}{2z-3i}\, dz \;=\; i\pi$$

et

$$\int_\gamma \frac{\sin(i\pi z)}{2z-3i}\, dz \;=\; i\pi\ \sin(i\pi z_1) = i\pi \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = i\pi.$$

2.3) Déterminer la valeur de l'intégrale suivante par "méthode de variables complexes"

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\, dx$$

Solution. Le calcul et les justifications sont tout à fait analogues au cas de l'intégrale de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^4+1}$ traité en classe et figurant dans les notes de cours.

Toutefois, redétaillons ci-dessous les différentes étapes.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^6+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 à l'infini après multiplication par x^2; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Cela étant, posons

$$f(z) = \frac{1}{z^6+1}.$$

Cette fonction est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur à savoir en tout complexe différent des racines sixièmes de -1: $\mathbb{C} \setminus \left\{e^{i\pi/6}, i, e^{5i\pi/6}, e^{-5i\pi/6}, -i, e^{-i\pi/6}\right\}$. Cela étant, on considère les chemins γ_R ($R > 1$) constitués par la juxtaposition du segment Γ_R joignant les réels $-R$ et R et de la demi-circonférence $\mathcal{C}_R$ centrée à l'origine, de rayon R, orientée dans le sens trigonométrique et dont les points ont une partie imaginaire positive. On a

$$|f(z)| \le \frac{1}{R^6-1}, \quad \text{en tout point } z \text{ de } \mathcal{C}_R$$

donc

$$\left|\int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz\right| \le \frac{L_{\mathcal{C}_R}}{R^6-1} = \frac{\pi R}{R^6-1} \qquad \to 0 \text{ si } R \to +\infty.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

D'autre part, en notant $z_0 = e^{i\pi/6},\ z_1 = i,\ z_2 = e^{5i\pi/6}$ (seules singularités entourées par le chemin fermé γ_R), en utilisant le théorème des résidus et en tenant compte du fait que les singularités isolées de f sont des zéros simples du dénominateur, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_R} f(z)dz &= 2i\pi\left(Res_{z_0}f + Res_{z_1}f + Res_{z_2}f\right) \\
&= 2i\pi\left(\frac{1}{6z_0^5} + \frac{1}{6z_1^5} + \frac{1}{6z_2^5}\right) \\
&= -\frac{i\pi}{3}\left(z_0 + z_1 + z_2\right) \\
&= -\frac{i\pi}{3}\left(i + e^{i\pi/6} + e^{5i\pi/6}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

[4]on peut aussi utiliser le théorème des résidus, ou même repasser directement à la définition

Il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{2\pi}{3}.$$

Question 3

3.1) On considère l'espace $L^2([-1,1])$ muni du produit scalaire habituel et on donne les fonctions

$$u(t) = e^{i\pi t}(t \in [-1,1]), \quad v(t) = e^{-i\pi t}(t \in [-1,1])$$

- Montrer que ces fonctions sont orthogonales.
- Déterminer la norme de la fonction u.

Solution. Voir le corrigé de l'examen d'août 2009.

3.2) On définit la fonction Γ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \;\; x \in]0,+\infty[.$$

(i) Montrer que cette définition a un sens (ie que $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ quel que soit $x > 0$)
(ii) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que, pour tous $x, y > 0$, on a

$$\Gamma\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \sqrt{\Gamma(x)\;\Gamma(y)}.$$

Solution. Cet exercice a été résolu aux répétitions (il fait partie de la liste 9).