

THEORIE

Question 1

1.1) Enoncer et démontrer le théorème de Liouville relatif à la caractérisation des fonctions entières avec bornation "polynomiale". Les hypothèses et les résultats utilisés dans la preuve doivent être clairement exprimés.

Voir cours.

1.2) Enoncer le résultat donnant le développement en séries de puissances entières d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité isolée (théorème de Laurent). Les hypothèses et thèse, de même que les notations employées, doivent être clairement exprimés.

Voirs cours.

Question 2 Enoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de Hilbert H puis, en guise d'application, dans l'espace $H = L^2([0, 1])$ (en précisant la signification des notations employées).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace de Hilbert H est

$$| \langle f, g \rangle | \leq \|f\| \|g\|, \quad \forall f, g \in H$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire de H et $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ la norme associée.

La notation $L^2([0, 1])$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables sur $[0, 1]$ dont le carré est intégrable sur $[0, 1]$.

Pour $H = L^2([0, 1])$, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\|\cdot\|$ correspondante sont

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \forall f, g \in L^2([0, 1]).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit donc

$$\left| \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \forall f, g \in L^2([0, 1]).$$

EXERCICES

Question 1

1.1) On fixe un repère orthonormé de l'espace. On considère la surface S d'équation cartésienne $z = x^2 + y^2$ située entre les plans d'équation $z = 0$ et $z = 4$ et dont les points ont une ordonnée positive. On considère aussi la fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z) = [y, y, x]$. Si $\vec{n}$ est la normale unitaire (orientée "dans le sens des z positif") à la surface, déterminer le flux du champ $\vec{f}$ au travers de la surface, à savoir la valeur de l'intégrale

$$\iint_S \vec{n} \bullet \vec{f} d\sigma$$

1.2) On fixe un repère orthonormé du plan. Calculer la longueur de l'arcade de cycloïde $\mathcal{C}$ de représentation paramétrique $[t - \sin(t), 1 - \cos(t)]$, $t \in [0, 2\pi]$.

Question 1.1) Un paramétrage de la surface $\mathcal{S}$ (sauf une partie négligeable) est donné par $\vec{\varphi}(r, \theta) = [r \cos(\theta), r \sin(\theta), r^2]$ avec $r \in]0, 2[$ et $\theta \in]0, \pi[$. Une normale à cette surface est donnée par $D_r \vec{\varphi} \wedge D_\theta \vec{\varphi}$. Comme

$$D_r \vec{\varphi}(r, \theta) = [\cos(\theta), \sin(\theta), 2r], \quad D_\theta \vec{\varphi}(r, \theta) = [-r \sin(\theta), r \cos(\theta), 0],$$

on a

$$D_r \vec{\varphi} \wedge D_\theta \vec{\varphi} = [-2r^2 \cos(\theta), -2r^2 \sin(\theta), r].$$

Puisque la troisième composante est positive, cette normale est orientée dans le sens des z positifs et la normale unitaire correspondante est

$$\vec{n}(r, \theta) = \frac{[-2r^2 \cos(\theta), -2r^2 \sin(\theta), r]}{\|D_r \vec{\varphi} \wedge D_\theta \vec{\varphi}\|}.$$

Le flux passant à travers la surface $\mathcal{S}$ est alors

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \vec{f} \bullet \vec{n} \, d\sigma &= \iint_{]0,2[\times]0,\pi[} \vec{f}(\vec{\varphi}(r, \theta)) \bullet \frac{[-2r^2 \cos(\theta), -2r^2 \sin(\theta), r]}{\|D_r \vec{\varphi} \wedge D_\theta \vec{\varphi}\|} \|D_r \vec{\varphi} \wedge D_\theta \vec{\varphi}\| \, dr d\theta \\ &= \iint_{]0,2[\times]0,\pi[} [r \sin(\theta), r \sin(\theta), r \cos(\theta)] \bullet [-2r^2 \cos(\theta), -2r^2 \sin(\theta), r] \, dr d\theta \\ &= \iint_{]0,2[\times]0,\pi[} (-2r^3 \sin(\theta) \cos(\theta) - 2r^3 \sin^2(\theta) + r^2 \cos(\theta)) \, dr d\theta \\ &= -2 \int_0^2 r^3 dr \int_0^\pi \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta - 2 \int_0^2 r^3 dr \int_0^\pi \sin^2(\theta) d\theta + \int_0^2 r^2 dr \int_0^\pi \cos(\theta) d\theta \\ &= -2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 \left[\frac{\sin^2(\theta)}{2} \right]_0^\pi - 2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta + \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^2 [\sin(\theta)]_0^\pi \\ &= -\frac{1}{2} 16 \frac{\pi}{2} \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

Question 1.2) La longueur $L_{\mathcal{C}}$ d'une courbe $\mathcal{C}$ de paramétrage régulier $\vec{\gamma}(t)$, $t \in I$, est la valeur de l'intégrale

$$\int_I \|D_t \vec{\gamma}(t)\| dt.$$

Pour l'arcade de cycloïde $\mathcal{C}$, on a

$$D_t \vec{\gamma}(t) = [1 - \cos(t), \sin(t)], \quad \|D_t \vec{\gamma}(t)\| = \sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

La longueur de cette arcade vaut donc

$$L_{\mathcal{C}} = \int_0^{2\pi} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4 \left[\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8$$

Question 2

2.1) On donne les fonctions f et g par

$$f(z) = ze^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = \frac{1 - \cos(z^2)}{z^5}$$

- Où ces fonctions sont-elles holomorphes?
- Quels sont leurs zéros? Quelles en sont les multiplicités respectives?
- Quelles sont les singularités isolées? De quels types sont-elles?
- Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
- Déterminer le développement de Laurent en chacune des singularités isolées.

2.2) Soit γ le bord du disque centré en $2i$ et de rayon 1. On considère que l'on parcourt ce bord "à gauche" et qu'on utilise un paramétrage injectif.

(a) Déterminer la valeur des intégrales suivantes

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{e^z}{z - i\pi} dz$$

(b) Déterminer la partie réelle de l'intégrale suivante

$$\int_{\gamma} \frac{\text{Log}(z)}{2z - 3i} dz$$

2.3) Déterminer la valeur de l'intégrale suivante par "méthode de variables complexes"

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx$$

Question (2.1) Fonction f .

- (a) Vu son expression, la fonction f est holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C}_0$
 (b) Cette fonction n'a aucun zéro dans Ω .
 (c) Le complexe 0 est la seule singularité isolée de f ; il s'agit d'une singularité essentielle car f n'admet pas de limite en 0 (par exemple, $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(\frac{1}{m}) = +\infty$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(-\frac{1}{m}) = 0$)¹
 (d) et (e) Le résidu de f en 0 peut s'obtenir directement en utilisant le développement de Laurent de f .
 On a en effet $e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2} + \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{Z^m}{m!}$ dans $\mathbb{C}$ donc

$$f(z) = ze^{1/z} = z + 1 + \frac{1}{2z} + \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{1}{z^{m-1}m!}, \quad z \in \mathbb{C}_0 \quad (*)$$

avec

$$h(z) = z + 1, \quad h \text{ holomorphe dans } \mathbb{C}, \quad H(Z) = \frac{Z}{2} + \sum_{m=3}^{+\infty} \frac{Z^{m-1}}{m!}, \quad H \text{ holomorphe dans } \mathbb{C}.$$

Dès lors, on a également

$$\text{Res}_0 g = \text{coefficient de } 1/z \text{ dans le développement de Laurent}^* = \frac{1}{2}.$$

Fonction g . Remarquons que g s'écrit comme quotient de deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$, à savoir $z \mapsto 1 - \cos(z^2)$ et $z \mapsto z^5$.

- (a) Vu son expression (quotient), la fonction g est holomorphe dans le complémentaire des zéros du dénominateur, c'est-à-dire dans $\mathbb{C}_0$. Cependant, 0 étant également un zéro du numérateur, la fonction g peut tout de même se prolonger en une fonction holomorphe en 0. Pour le vérifier, on utilise par exemple le développement de la fonction cosinus en série de puissances positives. On a

$$g(z) = \frac{1}{z^5} \left(1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (z^2)^{2k}}{(2k)!} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{4k-5}}{(2k)!} = \frac{1}{2z} + G(z), \quad z \in \mathbb{C}_0$$

avec

$$G(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{4k-5}}{(2k)!}$$

On a donc directement la décomposition de Laurent

$$g(z) = h(z) + H\left(\frac{1}{z}\right)$$

avec h, H holomorphes dans $\mathbb{C}$, $H(0) = 0$,

$$h(z) = G(z), \quad H(Z) = \frac{Z}{2}.$$

Comme H n'est pas nul, g ne se prolonge pas en une fonction holomorphe en 0.

- (b) Les zéros de g sont les complexes différents de 0 qui annulent g , c'est-à-dire les complexes z qui

¹Une autre justification directe consiste à utiliser le développement de Laurent

annulent $1 - \cos(z^2)$. Or, les seules solutions complexes u de l'équation $1 = \cos(u)$ sont les réels $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Les zéros de g sont donc les complexes non nuls dont le carré s'écrit $2k\pi$, k entier. L'ensemble des zéros de g est donc

$$\left\{ \sqrt{2k\pi} : k \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ -\sqrt{2k\pi} : k \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ i\sqrt{2k\pi} : k \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ -i\sqrt{2k\pi} : k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Ce sont tous des zéros simples car si z_k est l'un de ces zéros, on a $Dg(z_k) \neq 0$ (calcul direct).

(c) L'unique singularité isolée de g est 0. Vu le développement obtenu au point (a), H est un polynôme de degré 1 donc il s'agit d'un pôle d'ordre 1.

(d), (e) Le développement de Laurent a été obtenu au point (a) et le résidu de g en 0 est le coefficient de $1/z$ dans ce développement, à savoir $1/2$.

Question 2.2) (a) On a $\gamma(t) = 2i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. En utilisant directement la définition des intégrales curvilignes, on a

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} (-2i + e^{-it}) i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} (2e^{it} + i) dt = 2i\pi$$

La seconde intégrale se calcule directement en utilisant la formule intégrale de Cauchy car $z \mapsto e^z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et l'expression du chemin correspond tout à fait à l'énoncé de la formule intégrale de Cauchy. Le complexe $i\pi$ étant "à l'extérieur" du chemin γ , l'intégrale est donc nulle.

(b) L'intégrale se calcule directement grâce à la formule intégrale de Cauchy également. En effet, la fonction $z \mapsto \frac{1}{2} \text{Log}(z)$ est holomorphe dans l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ et l'expression du chemin correspond tout à fait à l'énoncé de la formule intégrale de Cauchy. Puisque $\frac{3i}{2}$ se trouve "à l'intérieur" de ce chemin, on a

$$\int_{\gamma} \frac{\text{Log}(z)}{2z - 3i} dz = i\pi \text{Log}\left(\frac{3i}{2}\right) = i\pi \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \pi \text{Arg}\left(\frac{3i}{2}\right) = i\pi \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{\pi^2}{2}$$

La partie réelle de cette intégrale vaut donc $-\frac{\pi^2}{2}$.

Question 2.3) La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire, et vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$I = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Posons

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}.$$

Les racines quatrièmes de $-1 = e^{i\pi}$ sont les complexes $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Cette fonction f est donc holomorphe dans le complémentaire de ces complexes, à savoir dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$. De plus, on a

$$2I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz$$

où Γ_R est le chemin $\Gamma_R(t) = t$, $t \in [-R, R]$.

Cela étant, un paramétrage du chemin C_R constitué de la demi-circonférence centrée à l'origine, de rayon R , dont les points ont une ordonnée positive et parcourue dans le sens trigonométrique est $C_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Le chemin fermé γ_R constitué par la juxtaposition de Γ_R et de C_R étant homotope à un chemin constant dans $\mathbb{C}$, le théorème des résidus donne, quel que soit $R > 1$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} f(z) dz &= 2i\pi (\text{Res}_{z_0} f + \text{Res}_{z_1} f) \\ &= 2i\pi \left(\frac{1}{4z_0^3} + \frac{1}{4z_1^3} \right) \\ &= -\frac{i\pi}{2} (z_0 + z_1) \\ &= -\frac{i\pi}{2} 2i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \pi R \frac{1}{R^4 - 1} \rightarrow 0 \text{ si } R \rightarrow +\infty.$$

Il s'ensuit que

$$I = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Question 3

3.1) Déterminer la transformée de Fourier $(-)$ de la fonction suivante (en explicitant les calculs qui y conduisent)

$$f(x) = e^{-3|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.2) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{9+x^2} dx$$

Question 3.1) La fonction donnée est intégrable dans $\mathbb{R}$ car elle est continue et $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x) = 0$.

Cela étant, comme la fonction est paire, on obtient directement, quel que soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^- f &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \cos(xy) e^{-3x} dx = 2\Re \left(\int_0^{+\infty} e^{-ixy} e^{-3x} dx \right) \\ &= 2\Re \left(\frac{1}{iy+3} \right) = 2\Re \left(\frac{3-iy}{y^2+9} \right) \\ &= \frac{6}{y^2+9}. \end{aligned}$$

3.2) Cela étant, comme cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a directement (la fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, l'égalité du théorème de Fourier est une égalité ayant lieu en tout réel)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{9+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2ix}}{9+x^2} dx = \frac{1}{12} \mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}^- f = \frac{\pi}{6} f(2) = \frac{e^{-6}\pi}{6}.$$

Question 4 Démontrer que si f et g sont deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C}$ vérifiant $f(z)g(z) = 0$ quel que soit z , alors f est identiquement nul ou g est identiquement nul.

Supposons que la fonction g ne soit pas identiquement nulle. Il existe donc un complexe z_0 tel que $g(z_0)$ soit non nul. La fonction étant holomorphe (donc continue), il existe une boule centrée en z_0 telle que g ne s'annule pas dans cette boule. La fonction f doit donc y être identiquement nulle. Comme $\mathbb{C}$ est connexe, une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$, identiquement nulle dans un ouvert de $\mathbb{C}$ est identiquement nulle dans $\mathbb{C}$. Dès lors f est nulle en tout point de $\mathbb{C}$ (ie f est identiquement nul).