

ANALYSE II

Liste "type" 2

Mardi 29 septembre 2009-mardi 06 octobre 2009

REMARQUES pour les séances de répétition

- Références: notamment *Erwin Kreyzsig* (de 9.4 à 9.9)

- A la répétition: exercices *

ANALYSE VECTORIELLE, 1ère PARTIE (manipulations algébriques, géométriques et dérivation)

1. Soient $\vec{F}, \vec{G}$ des fonctions à valeurs vectorielles en la variable réelle u et soit ϕ une fonction scalaire de la variable réelle u . On suppose que ces fonctions sont dérivables dans le même intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Dans cet intervalle,

(i) (*) établir la formule

$$D_u(\vec{F} \bullet \vec{G}) = (D_u \vec{F}) \bullet \vec{G} + \vec{F} \bullet (D_u \vec{G})$$

et déduire qu'un vecteur de norme constante est orthogonal à sa dérivée;

(ii) établir la formule

$$D_u(\phi \vec{F}) = \phi D_u \vec{F} + (D_u \phi) \vec{F}.$$

2. On désigne par $\vec{e}_j$ ($j = 1, 2, 3$) les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On donne la fonction vectorielle $\vec{R}$ par

$$\vec{R}(t) = \cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2 + t \vec{e}_3.$$

a) Déterminer

$$(*)D_t \vec{R}, \quad (**)D_t^2 \vec{R}, \quad \|D_t \vec{R}\|, \quad (**)D_t \vec{R} \wedge D_t^2 \vec{R}.$$

b) (*) Esquisser la courbe décrite par l'extrémité P du vecteur lié $\vec{OP}(t) = \vec{R}(t)$, $t \geq 0$ et représenter le vecteur tangent à la courbe aux points de paramètre $t = \frac{\pi}{4}$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

3. On désigne par $\vec{e}_j$ ($j = 1, 2, 3$) les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. On donne la fonction vectorielle $\vec{F}(u, v) = u \sin v \vec{e}_1 + v \cos u \vec{e}_2 + u \vec{e}_3$. Déterminer l'expression explicite des fonctions suivantes (à valeurs scalaires ou vectorielles)

$$D_u \vec{F} \bullet D_v \vec{F}, \quad D_u \vec{F} \wedge D_v \vec{F}.$$

4. On désigne par $\vec{e}_j$ ($j = 1, 2, 3$) les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace. Une particule se déplace de telle sorte qu'à l'instant t , le vecteur position $\vec{r}$ est donné par $\vec{r}(t) = \cos(\omega t) \vec{e}_1 + \sin(\omega t) \vec{e}_2$, où ω est une constante.

(i) Montrer qu'à tout instant, la vitesse $\vec{v}$ de la particule est orthogonale au vecteur position.

(ii) Montrer qu'à tout instant, l'accélération de la particule est dirigée vers l'origine et a une norme proportionnelle à la distance à l'origine.

(iii) Montrer que la fonction vectorielle $\vec{r} \wedge \vec{v}$ est un vecteur constant.

(iv) Interpréter géométriquement les résultats.

5. (* En faire au moins un; suggérer les autres) On suppose que la température est donnée en tout point du plan par le champ scalaire $T(x, y) = xy$. Déterminer les isothermes de ce champ (ce sont des courbes du plan; en préciser aussi la nature), le vecteur formé des dérivées partielles (ie le gradient du champ) et en donner une représentation graphique.

Même question pour $T(x, y) = x^2 - y^2$, $T(x, y) = x^2 - 4x + y^2$, $T(x, y) = x^2 + y^2/4$.

Déterminer également une représentation paramétrique de chacune de ces courbes

6. a) Esquisser une représentation graphique du champ vectoriel $\vec{v}(x, y) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ (la notation $\vec{e}_j$ ($j = 1, 2$) désigne les vecteurs d'une base orthonormée du plan).

b) cf en 1er bachelier: voir aussi par exemple le problème des fourmis.

Supposons que $\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_1 + y(t)\vec{e}_2$ soit le vecteur position d'une particule à l'instant t et que sa vitesse soit donnée par le champ $\vec{v}$ ci-dessus ($D\vec{r} = \vec{v}$). Quelles courbes décrit la particule au cours du temps? Représenter graphiquement celles-ci (en fonction de conditions initiales), sur le même dessin que le champ $\vec{v}$.

Même question pour

$$\begin{aligned}\vec{v}(x, y) &= y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2, & \vec{v}(x, y) &= y\vec{e}_1 - x\vec{e}_2 \\ \vec{v}(x, y) &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, & \vec{v}(x, y) &= x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2, & \vec{v}(x, y) &= 4y\vec{e}_1 - x\vec{e}_2.\end{aligned}$$

ANALYSE VECTORIELLE, 1ère PARTIE, suite (gradient, divergence, rotationnel)

Rappels:

- rotationnel (rot ou curl) et divergence (div) d'un champ vectoriel; gradient (grad) d'un champ scalaire
- le *gradient* est aussi appelé opérateur "nabla", noté $\vec{\nabla}$ ou même parfois simplement ∇
- le *laplacien* est l'opérateur (du second ordre) $\text{div}(\text{grad})$; il est noté Δ ; on a donc (si trois variables réelles): $\Delta f = D_x^2 f + D_y^2 f + D_z^2 f$

Remarquons qu'avec ces notations, on peut aussi écrire (symboliquement)

$$\text{div} \vec{f} = \vec{\nabla} \bullet \vec{f}, \quad \text{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \wedge \vec{f}, \quad \Delta f = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla} f \text{ (parfois noté } = \vec{\nabla}^2 f \text{)}.$$

1. On donne les champs vectoriel et scalaire suivants

$$\vec{r}(x, y, z) = [x, y, z], \quad r(x, y, z) = \|\vec{r}(x, y, z)\|.$$

Déterminer

- (i) le rotationnel du champ vectoriel $\vec{r}$
- (ii) le gradient du champ scalaire $1/r$
- (iii*) le gradient du champ scalaire $\vec{r} \bullet \vec{r}$
- (iv*) le gradient de la divergence des champs vectoriels $\vec{r}$ et $r\vec{r}$.

Si $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ est un vecteur constant, déterminer également

- (v) le rotationnel du champ $\vec{a} \wedge \vec{r}$
- (vi) le gradient du champ $\|\vec{a} \wedge \vec{r}\|$.

2. Déterminer le gradient du champ scalaire f , la divergence du champ vectoriel $\vec{C}$ et le rotationnel du champ $\vec{D}$ (la notation $\vec{e}_j$ ($j = 1, 2, 3$) désigne les vecteurs d'une base orthonormée de l'espace).

$$f(x, y) = xye^y, \quad \vec{C}(x, y, z) = \arctan(x^2 + y^2)\vec{e}_1 + z\vec{e}_2, \quad \vec{D}(x, y, z) = y^2\vec{e}_1 + xz\vec{e}_2 + xyz\vec{e}_3.$$

3. Sur les exemples suivants, vérifier que le rotationnel du gradient d'un champ scalaire régulier est nul et que la divergence du rotationnel d'un champ vectoriel régulier est nul.

$$(*)H(x, y, z) = \cos(xyz), \quad \vec{f}(x, y, z) = [x^2y, x^2z^4, e^{xyz}].$$

4. Les opérations suivantes ont-elles un sens? Si oui, définissent-elles un champ scalaire ou un champ vectoriel?

- (i) Gradient de la divergence d'un champ vectoriel
- (ii) Gradient de la divergence d'un champ scalaire
- (iii) Divergence du gradient d'un champ scalaire
- (iv) Divergence du gradient d'un champ vectoriel
- (v) Divergence de la divergence d'un champ scalaire
- (vi) Divergence du gradient d'un champ scalaire
- (vii) Rotationnel de la divergence d'un champ vectoriel

5. Déterminer la dérivée dans la direction $\vec{h}$ du champ scalaire f au point P (Il s'agit en fait simplement de calcul de différentielle, dans laquelle on met bien en évidence l'intervention du gradient).

$$f(x, y, z) = xyz, \quad P(-1, 1, 3), \quad \vec{h} = [1, -2, 2].$$

6. a) (*) A propos du gradient: EK p409, exercices 13 et 14. Esquisser également les isothermes.
 b) (EK p 413) Reprendre les exemples de champ $\vec{v}$ de l'exercice 6 (première partie de cette liste 2).
 Supposons que le champ $\vec{v}$ représente la vitesse du courant d'un fluide et que l'on examine ce qui se passe dans un carré centré à l'origine et de côtés parallèles aux axes. Si $D_t x = v_1$ et $D_t y = v_2$, déterminer les courbes $(x(t), y(t))$ le long desquelles se déplacent les particules (ie intégrer le champ $\vec{v}$). Peut-on prévoir le signe de la divergence du champ en un point du bord du carré?

Déterminer explicitement la divergence de ce champ.

Déterminer aussi le rotationnel de ce champ (avec 0 en guise de troisième composante du champ).

7. Montrer que l'opérateur $(grad(div) - rot(rot)) \cdot = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \bullet \cdot) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \cdot)$ qui s'applique à un champ vectoriel pour donner un champ vectoriel est tel que

$$(grad(div) - rot(rot)) \vec{f} = [\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3] \quad \text{où} \quad \vec{f} = [f_1, f_2, f_3].$$

8. (*) Les champs électrique $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ et magnétique $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ vérifient les équations de Maxwell suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \bullet \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{c} D_t \vec{H} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{1}{c} D_t \vec{E} \end{array} \right. \quad \text{ou encore} \quad \left\{ \begin{array}{l} div \vec{E} = 0 \\ div \vec{H} = 0 \\ rot \vec{E} = -\frac{1}{c} D_t \vec{H} \\ rot \vec{H} = \frac{1}{c} D_t \vec{E} \end{array} \right.$$

Montrer que ces champs (en fait chaque composante de chacun d'eux) vérifient également l'équation des ondes, à savoir

$$\left(\frac{1}{c^2} D_t^2 - \Delta \right) \vec{u} = \vec{0}.$$

9. Sous certaines hypothèses, on sait qu'un champ vectoriel est irrotationnel¹ si et seulement s'il dérive d'un potentiel scalaire² et qu'un champ vectoriel est indivergentiel³ si et seulement s'il dérive d'un potentiel vecteur⁴.

- (*) Montrer que le champ vectoriel $\vec{f}(x, y, z) = [x, 4y, -z]$ admet un potentiel scalaire. Le déterminer. Est-il unique?
- Montrer que le champ vectoriel $\vec{f}(x, y, z) = \frac{[x, y, z]}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ admet un potentiel scalaire dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ qui s'annule à l'infini et calculer celui-ci.
- Soit $\vec{a}$ un vecteur constant et soit $\vec{r}$ le champ vectoriel $[x, y, z]$. Montrer que le champ vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{r}$ admet un potentiel vecteur et le calculer.

FB, September 16, 2009(V1:01-08-07)

¹ie son rotationnel est nul

²ie il est égal au gradient d'un potentiel scalaire

³ie sa divergence est nulle

⁴ie il est égal au rotationnel d'un champ vectoriel

ANALYSE II

Liste “type” 2

Solutions

Liste 2 de 2009-2010:
exercices de 2008-2009 un peu amendée (*)

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 2 de 2007-2008, 2006-2007).