Analyse II

Liste “type” 4

Mardi 20 et mardi 27 octobre 2009

REMARQUES pour les séances de répétition
- Réf: notamment le livre de référence pour le cours, à savoir *Erwin Kreyzsig* Chapitre 13
- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D’UNE VARIABLE COMPLEXE, 1ere partie

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants (α est réel)

$$\frac{1+i}{1-2i}, \quad \frac{1}{\overline{2i^3-1}}, \quad \frac{1}{\sin\alpha + i\cos\alpha}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{3}\right).$$

2. (*) Déterminer le module et la valeur principale (ie dans $]-\pi,\pi]$) de l’argument des complexes suivants

$$e^i, \quad (1+i)^{12}, \quad z_1, \quad z_2, \quad z_1z_2$$

   où $z_1 = -2+2i$ et $z_2 = 5i$.

3. Déterminer les racines quatrièmes de 1 (resp. $16i$) et en donner une représentation géométrique.

4. Résoudre les équations suivantes (z est une variable complexe)

$$z^2+1=0,\ z^4-16=0,\ (*)z^4+16=0,\ (*)z^2+z+1=0,\ (*)z^3-1=0,\ (*)z^2-i=0.$$

5. Exercices 1-10 EK p617

6. On définit $\mathbb{C}^2$ comme étant l’ensemble des couples de complexes (appelé encore vecteur à deux composantes complexes). Dans cet ensemble, on définit l’addition et la multiplication par un complexe (par ...), de même que le *produit scalaire*

$$<(z_1,z_2),(z_1',z_2')>= z_1\overline{z_1'} + z_2\overline{z_2'}$$

   et la norme

$$\|(z,z')\| = \sqrt{|z|^2+|z'|^2}.$$

   Calculer la norme de $(1,i)$ et le produit scalaire des éléments suivants de $\mathbb{C}^2$: $(1,i)$ et $(1+i, \frac{1}{1+i})$. Généralisation possible à $\mathbb{C}^n$.

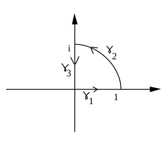
7. a) La série de terme général $1/n!$ converge-t-elle? Pourquoi? En déterminer la somme.

   b) La série de terme général $1/3^m$ converge-t-elle? Pourquoi? En déterminer la somme.

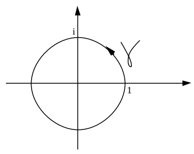
   c) Dans chacun des cas suivants, déterminer si les séries sont absolument convergentes/semi-convergentes. Si besoin, préciser en fonction du complexe z.

   - $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-z)^m}{m}$
   - $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(10-15i)^m}{m!}$
   - $\sum_{m=1}^{+\infty} (1+i)^{-m}$
   - $\sum_{m=1}^{+\infty} m^2\left(\frac{i}{3}\right)^m$

8. (*) Soit $f(z)=|z|$. Calculer $\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz$ pour les chemins C_1 suivants.



Calculer $\int_\gamma f(z)dz$ avec $f(z) = z,\ f(z) = \overline{z},\ f(z) = \frac{1}{z},\ f(z) = \frac{1}{z^2}$ et γ



9. Soit

$$S_\gamma = \int_\gamma \overline{z}\, dz.$$

   - Montrer que, si γ est fermé, alors l'expression $\frac{1}{2i} S_\gamma$ est réelle et en donner une interpétation.
   - Calculer S_γ pour le chemin formé par la juxtaposition du segment joignant l'origine au point de coordonnées $(1, 0)$ et du segment joignant $(1, 0)$ et $(1, 1)$.

10. Déterminer si les fonctions suivantes, prolongées par 0 en 0, sont continues en 0

$$f(z) = \frac{\Re z^2}{|z^2|}, \quad g(z) = |z|^2 \Re\left(\frac{1}{z}\right).$$

11. Montrer que la fonction $f(z) = \Re z$ n'est holomorphe en aucun point.

12. Montrer directement que la fonction f définie par $f(z) = \Re(\cos z)$ est harmonique dans $\mathbb{R}^2$.

13. Résoudre les équations suivantes en la variable complexe z

$$\cos z = 0, \quad \cos z = 1, \quad \cos z = 3, \quad \sinh z = 0.$$

14. (*) Déterminer $Log_\pi z = Log z = Ln z$ (resp. $Log_0 z$) pour les complexes z suivants

$$-10, \quad 2 - 2i, \quad i, \quad -i, \quad e^{-i}.$$

Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes suivants (définition des puissances utilisant Log puis Log_0) :

$$(-i)^i, \quad (-1)^{1+i}.$$

15. (*) Déterminer où les fonctions suivantes sont holomorphes

$$\frac{1}{\sin z}, \quad \frac{1}{z^4 + 1}, \quad Log_0(1 + z), \quad \frac{Log z}{z^3 + 1}$$

16. (*) Soit la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$, holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En notant $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$P(x, y) = \Re f(z), \quad Q(z) = \Im f(z).$$

Représenter les courbes de niveau de P et de Q. Montrer que celles-ci sont orthogonales (au sens suivant: les tangentes aux points d'intersections sont orthogonales entre elles).
Suggestion: utiliser le gradient de P, et Q, ainsi que les relations de Cauchy-Riemman pour les parties réelle et imaginaire d'une fonction d'une variable complexe.

Analyse II

Liste "type" 4

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) (solutions à la liste 4 de 2006-2007; l'exercice 13 de la liste de 2006-2007 a été incorporé dans l'exercice 1 de 2009-2010).