

ANALYSE II

Liste "type" 7

Mardis 17 novembre 2009, 24 novembre 2009

REMARQUES pour les séances de répétition

- A la répétition: exercices *

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE, 2eme partie, suite

- Soient f, g deux fonctions holomorphes dans l'ouvert connexe Ω . Montrer que si la fonction $F = \bar{f}g$ est holomorphe dans Ω , alors f est constant dans Ω ou g est identiquement nul dans Ω .
- Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega = \mathbb{R} \times]-\delta, \delta[$ ($\delta > 0$). Montrer que si $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x > 0$ alors $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout réel x .
- a) Soit f une fonction holomorphe dans Ω et soit un chemin fermé γ de Ω .

- On a $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$	Vrai <input type="checkbox"/>	Faux <input type="checkbox"/>
- On a $\int_{\gamma} Df(z)dz = 0$	Vrai <input type="checkbox"/>	Faux <input type="checkbox"/>

 b) Si $z_0 \in \Omega$ est un zéro d'ordre p pour f (holomorphe dans Ω) alors la fonction $F : z \mapsto \frac{f(z)}{(z-z_0)^p}$ se prolonge en une fonction holomorphe en z_0 de même que $1/F$

Vrai <input type="checkbox"/>	Faux <input type="checkbox"/>
Vrai <input type="checkbox"/>	Faux <input type="checkbox"/>

 c) Il existe une fonction holomorphe au voisinage de 0 (exclus) telle que $Df(z) = \frac{1}{z}$

Vrai <input type="checkbox"/>	Faux <input type="checkbox"/>
-------------------------------	-------------------------------

 Justifier chaque fois les réponses.
- Soient $z_1, \dots, z_J \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$, $C > 0$ et f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_J\}$. Montrer que si chacun des z_j est un pôle pour f et si f vérifie $|f(z)| \leq C|z|^p$ pour $|z|$ suffisamment grand alors f est une fraction rationnelle.
- (*) Où les fonctions suivantes sont-elles holomorphes? Quelles sont leurs singularités isolées? De quels types sont-elles? ($\theta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{lll}
 f_1(z) = \frac{1}{z^4 + 2z^2 + 1} & f_2(z) = \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^7} & f_3(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) \\
 f_4(z) = \frac{1}{\sin(1/z)} & f_5(z) = \tan z & f_6(z) = \frac{1}{z^2 - 2z \cos \theta + 1} \\
 f_7(z) = \frac{\sinh(\pi z)}{z^2 + 1} & f_8(z) = \frac{\text{Ln}(z+1)}{z} & f_9(z) = \frac{1}{z - z^3} \\
 f_{10}(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z} & f_{11}(z) = e^{z+1/z} & f_{12}(z) = \frac{\sinh z}{z^2}.
 \end{array}$$

6. EK p707 : 1(*), 2(*), 6, 10, 13(*)

7. (*) Soit la fonction

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^2} e^{1/z}.$$

- Quelles sont ses singularités isolées? De quels types sont-elles?
 - On pose $\gamma_r(t) = r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, avec $r > 0$, $r \neq 1$. Déterminer $\int_{\gamma_r} f\left(\frac{1}{z}\right) dz$.
 - Déterminer les coefficients a_0 et a_{-1} du développement de Laurent de f en 0.
- (*) Soit z_0 une singularité isolée pour f .
 - Si z_0 est un pôle d'ordre p pour f , quel est le type de singularité de z_0 pour Df ?
 - Si z_0 est une singularité essentielle pour f , quel est le type de singularité de z_0 pour Df ?
 - Déterminer le coefficient a_{-1} (le résidu) du développement de Laurent de Df en z_0 .

ANALYSE II

Liste "type" 7

Solutions

Les solutions sont disponibles en format pdf (par exemple sur le site web www.afo.ulg.ac.be) : rubrique "solutions à la liste 7 de 2006-2007".

Remarque: attention au changement de numérotation des exercices dans la liste 7 des différentes années académiques.