Analyse II Liste supplémentaire

1. a) Discuter suivant la valeur du paramètre réel p l'existence de l'intégrale suivante (fonction Gamma)

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1}\ dx.$$

   b) Que peut-on dire si l'on considère que p est complexe?

2. Calculer l'aire de l'ensemble et le représenter dans un repère orthonormé

$$E = \{(x, y) : x \geq 1 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

3. Dans un repère orthonormé de l'espace, déterminer les composantes d'une normale unitaire en un point quelconque des surfaces suivantes
   - sphère centrée à l'origine et de rayon $\sqrt{\pi}$
   - d'un tore,
   - d'un cylindre droit à base circulaire.

4. (EK) a) Montrer que l'écoulement dont le vecteur vitesse est donné par

$$\vec{v} = y\ \vec{e}_1$$

   est un écoulement incompressible.

   b) Sachant qu'au temps $t = 0$ les particules sont situées dans un cube dont les faces sont délimitées par les plans d'équation cartésienne $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ et $z = 1$, montrer qu'au temps $t = 1$, les particules occupent un volume de mesure 1.

5. (EK) Soit $\vec{v}$ le vecteur vitesse d'un écoulement régulier. Déterminer si l'écoulement est irrotationnel et/ou incompressible.

   Déterminer également les trajectoires des lignes de courant (c'est-à-dire les courbes que suivent les particules).
   - $\vec{v} = [0, z^2, 0]$,
   - $\vec{v} = [y, -x, 0]$,
   - $\vec{v} = [x, -y, z]$.

6. (EK) Sous certaines hypothèses, montrer que
   - $rot\ (\vec{u} + \vec{v}) = rot\ \vec{u} +\ rot\ \vec{v}$,
   - $rot\ (f\vec{v}) = (grad\ f) \wedge \vec{v} + f\ rot\ \vec{v}$.

7. (EK) Soient les champs vectoriels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les champs scalaires f et g suivants

$$\vec{u} = [y^2, z^2, x^2], \quad \vec{v} = [yz, zx, xy], \quad f = xyz, \quad g = x + y + y.$$

   Déterminer les expressions suivantes
   - $\vec{u} \wedge rot\ \vec{v}$,
   - $\vec{v} \bullet rot\ \vec{u}$,
   - $rot\ (g\vec{v})$,
   - $rot\ (f\vec{v})$.

FB, TB September 22, 2009(V1:22-09-09)

Analyse II

Liste supplémentaire, solutions

Tore from wiki

$$\begin{cases} x = (a + b\cos v)\cos u \\ y = (a + b\cos v)\sin u \\ z = b\sin v \end{cases}$$