Analyse II Liste pour le TD du 04 décembre 2009

Exercice 1. a) Calculer la longueur de la courbe $\Gamma = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x,\ x \in [0,1]\big\}$ et en donner une représentation dans un repère orthonormé.

b) Soient $\vec{f}(x,y,z) = [y, -x, z^2]$ et $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1\}$. Calculer le flux[1] passant à travers la surface $\mathcal{S}$ dans la "direction des z positifs".

Exercice 2. a) Soit γ le bord d'un carré dont l'intérieur contient l'origine. Calculer

$$\int_\gamma e^{1/z^2} dz \quad \text{et} \quad \int_\gamma z e^{1/z^2} dz$$

b) Soit γ le bord du carré centré en 1/2, de côtés parallèles aux axes et longueur 1. Déterminer

$$\int_\gamma \overline{z}\ dz \quad \text{et} \quad \int_\gamma (\Re z)^2\ dz.$$

Exercice 3. En utilisant les intégrales paramétriques, on a vu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2/4}$$

Obtenir ce résultat par des outils de variables complexes.
Suggestion. On peut supposer $b > 0$. Intégrer la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ sur les bords des rectangles $[-R, R] \times [0, b/2]$ et passer à la limite quand $R \mapsto +\infty$.

Exercice 4. Calculer (si possible) les intégrales suivantes

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{5} - \cos\theta}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^6} dx$$

Exercice 5. On donne explicitement les fonctions suivantes

$$f_1(z) = \frac{\sin z}{z^2}, \quad f_2(z) = \frac{e^{z^2+1}}{z^2+1} \quad f_3(z) = \frac{\sin z}{\sin(iz)}.$$

a) Où ces fonctions sont-elles holomorphes?
b) Quelles sont les sigularités isolées? De quels types sont-elles?
c) Déterminer le résidu en chacune des singularités isolées.
d) Déterminer le développement de Laurent (expressions explicites de h, H et du développement en série de puissances entières) de f_1 au voisinage des singularités isolées.
e) Déterminer le développement de Laurent (expression[2] explicite de h, H) de f_2 au voisinage des singularités isolées.

FB, November 19, 2009(V1:15-11-09)

[1] $\displaystyle\int\int_{\mathcal{S}} \vec{f} \bullet \vec{n}\ d\sigma$

[2] L'expression explicite du développement en série de puissances entières nécessite quelques calculs. Une suggestion: pour tous naturels k, m tels que $m \le k \le 2m$, on a

$$D^k(z^2+1)^m = \sum_{l=0}^{k} C_k^l D^{k-l}(z+i)^m\ D^l(z-i)^m$$

donc ...

$$\Big[D^k(z^2+1)^m\Big]_{z=i} = k! C_m^{2m-k}(2i)^{2m-k}$$