Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2010

Corrigé de l'interrogation de math du 25 octobre 2010

Version 3 novembre 2010

1. **a) (i) Quel est le domaine de définition de la fonction cosinus ?**
(ii) Comment définit-on géométriquement le cosinus du réel 2 ? Expliquer clairement votre réponse et l'illustrer par une représentation géométrique.
b) Si α désigne un réel de l'intervalle $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ et si $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, que valent les nombres

$$\mathrm{cotg}\alpha,\ \sin\alpha,\ \cos\alpha?$$

c) Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, résoudre l'équation

$$\cos(x+\pi) = \sin(2x)$$

Solution. a) Voir cours.

b) Pour tout réel α différent de $k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{cotg}(\alpha) = 1/\mathrm{tg}(\alpha)$. Dès lors, $\mathrm{cotg}(\alpha) = -\dfrac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ si on multiplie numérateur et dénominateur par $\sqrt{2}$.
Vu que $\mathrm{tg}^2(\alpha) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$, on a $\cos^2(\alpha) = \frac{2}{3}$ et comme $\cos(\alpha) > 0$ puisque $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, on obtient $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
Enfin, comme $\sin(\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha)\ .\ \cos(\alpha)$, on a $\sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ .\ \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) L'équation est équivalente à

$$\begin{aligned}
\cos(x+\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x + \pi = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x + \pi = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)
\end{aligned}$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{11\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

2. **a) Déterminer les solutions réelles (x) de l'inéquation suivante**

$$|x^2 - 1| \geq 1$$

b) Soient a et b deux nombres réels. On considère la propriété suivante : *La valeur absolue du produit de a et b est toujours plus petite ou égale à la demi-somme des carrés de a et b.*
(i) Ecrire cette propriété mathématiquement.
(ii) Cette propriété est-elle correcte ? Si la réponse est oui, la démontrer. Si la réponse est non, donner un contre-exemple.

Solution. a) L'inéquation est équivalente à

$$(x^2 - 1 \leq -1 \quad \text{ou} \quad x^2 - 1 \geq 1) \Leftrightarrow (x^2 \leq 0 \quad \text{ou}\ x^2 - 2 \geq 0) \Leftrightarrow (x = 0 \quad \text{ou} \quad x \leq -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x \geq \sqrt{2}).$$

Dès lors, l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

b) (i) $\forall a, b \in \mathbb{R} : |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.
(ii) Cette propriété est correcte. En effet, comme pour tous réels a et b on a $|ab| = |a|\ |b|$ et $|a|^2 = |a^2| = a^2$, l'inégalité est équivalente à

$$|a|\ |b| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} \Leftrightarrow 2|a|\ |b| \leq |a|^2 + |b|^2 \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 - 2|a|\ |b| \geq 0 \Leftrightarrow (|a| - |b|)^2 \geq 0.$$

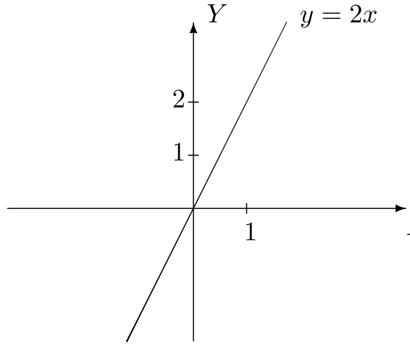
Le membre de gauche étant toujours positif ou nul, l'inégalité est donc vérifiée pour tous réels a, b.

3. **On se place dans un repère orthonormé du plan. Déterminer des équations paramétriques et l'équation cartésienne de la droite orthogonale à la droite d'équation $x + 2y + 1 = 0$ et passant par l'origine. Représenter cette droite.**

   Solution. Un vecteur directeur de la droite d'équation $x+2y+1 = 0$ a pour composantes $(2, -1)$ par exemple. Un vecteur directeur de toute droite orthogonale à cette droite a donc pour composantes $(1, 2)$ par exemple puisque le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul.
   Ainsi, des équations paramétriques de la droite demandée sont données par

$$\left\{\begin{array}{l} x = r \\ y = 2r \end{array}\right. , \; r \in \mathbb{R}.$$

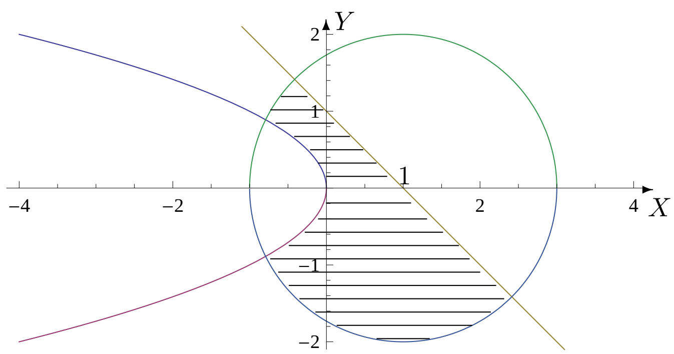
   Cette droite a pour équation cartésienne $y = 2x$.



4. **On se place dans un repère orthonormé. Dans celui-ci, quelle est la représentation graphique de l'ensemble décrit analytiquement ci-dessous ? S'il fait intervenir des coniques, en préciser le type.**

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x + y \leq 1, \; y^2 + x \geq 0, \; x^2 - 2x + y^2 \leq 3\right\}$$

   Solution. L'équation $x + y = 1$ est l'équation cartésienne d'une droite et l'équation $y^2 + x = 0$ est celle d'une parabole.
   L'équation $x^2 - 2x + y^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 4$ est l'équation cartésienne du cercle centré au point de coordonnées $(1, 0)$ et de rayon 2.



   Les points de l'ensemble sont ceux de la partie hachurée du plan, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.

Problèmes élémentaires

a) Un tonneau d'une contenance de $150\ dm^3$ **est rempli d'eau à l'aide de bouteilles de** $75\ cl$**. Combien de bouteilles doit-on verser pour remplir complètement le tonneau ?**

Solution. Comme 150 dm^3 sont égaux à 150 l et 75 cl à 0,75 l donc $\frac{3}{4}$ l, si x est le nombre de bouteilles de 75 cl à verser pour remplir le tonneau, on a

$$\frac{3}{4}x = 150 \Leftrightarrow x = 150\ \frac{4}{3} = 200.$$

Ainsi, on doit verser 200 bouteilles pour remplir complètement le tonneau.

b) On dispose d'un récipient contenant 1 litre de mélange d'alcool et d'eau et on sait l'alcool présent à une concentration de 30% en volume (du mélange complet). On chauffe le mélange. Il y a donc évaporation et on suppose que l'alcool s'évapore trois fois plus vite que l'eau. Sachant que celle-ci s'évapore à raison de $1\ cm^3$ par minute, quelle devra être la durée de l'opération de chauffage pour obtenir un mélange dans lequel on ne trouve plus que 25% d'alcool en volume ?

Solution. Vu que 1 l est égal à 1 $\text{dm}^3 = 1000\ \text{cm}^3$, au départ, on a un mélange constitué de $\frac{30}{100}1000 = 300$ cm^3 d'alcool et de 700 cm^3 d'eau. Quand on chauffe ce mélange, on sait que 1 cm^3 d'eau et 3 cm^3 d'alcool s'évaporent chaque minute. Dès lors, après t minutes de chauffage, on a un volume d'alcool égal à $300 - 3t$ et un volume de mélange égal à $1000 - 3t - t = 1000 - 4t$.
L'alcool à ce moment représentant 25 % (c'est-à-dire $\frac{1}{4}$) du volume total, on a

$$\frac{300 - 3t}{1000 - 4t} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1200 - 12t = 1000 - 4t \Leftrightarrow 200 = 8t \Leftrightarrow t = 25.$$

Ainsi, on doit chauffer le mélange pendant 25 minutes pour obtenir un mélange ne comprenant que 25 % d'alcool.