1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 1
Répétition 1 : correction

Version 28 septembre 2010(V1 : 29/08/09)

I. Problème élémentaire

Combien de m^3 d'eau de mer doit-on prendre pour en retirer 615 kg de sel si 1 litre de cette eau pèse 1,025 kg et contient 3% de son poids en sel ?

1. **Quelles sont les données ?**
   1 litre d'eau de mer pèse 1,025 kg et contient 3% de son poids en sel.
2. **Que cherche-t-on ?**
   La quantité de m^3 d'eau de mer à prendre pour en retirer 615 kg de sel.
3. **Si on nomme x l'inconnue, que représente x de façon précise ?**
   Le nombre de m^3 d'eau de mer à prendre.
4. **Quel lien existe-t-il entre des m^3 et des litres ?**
   $1 \text{ m}^3 = 1\ 000$ l.
5. **Que peut-on calculer successivement ?**
   La quantité de sel dans 1 litre d'eau de mer puis dans 1 m^3 d'eau. Enfin le nombre de m^3 d'eau à prendre pour en retirer 615 kg de sel.
6. **Quelle est l'équation obtenue ?**
   $$1,025\ .\ 3\ .10^{-2}\ .\ 10^3\ x = 615$$
7. **La résoudre.**
   L'équation est équivalente à
   $$x = \frac{615}{30,75} \Leftrightarrow x = 20$$
8. **Donner la solution du problème.**
   On doit prendre 20 m^3 d'eau de mer pour en retirer 615 kg de sel.

II. Résolution d'équations (x est l'inconnue réelle)

1. a) **Définir une équation du premier degré à une inconnue en indiquant de façon précise ce que représente chaque lettre utilisée.**
   Une équation du premier degré à une inconnue est une relation du type $ax + b = 0$ où a et b sont des réels donnés, $a \neq 0$ et x est l'inconnue réelle.
   b) **Comment résout-on une équation de ce type ? Exprimer avec précision les opérations utilisées (addition, soustraction, multiplication, division)**
   On soustrait b dans les deux membres puis on divise les deux membres par $a \neq 0$.
   c) **Résoudre l'équation $-\pi x + \frac{1}{4} = \frac{x}{\pi}$ en suivant les démarches que vous avez indiquées ci-dessus sans oublier d'indiquer les liens entre les différentes équations intervenant dans la résolution. Conclure l'exercice en indiquant l'ensemble des solutions.**
   On a
   $$-\pi x + \frac{1}{4} = \frac{x}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{x}{\pi} + \pi x \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{(1+\pi^2)x}{\pi} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4(1+\pi^2)}$$
   L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{ \frac{\pi}{4(1+\pi^2)} \right\}$.
   d) **Une équation du premier degré à une inconnue peut-elle parfois avoir plus d'une (ou moins d'une) solution ? Si oui, à quelle(s) condition(s) ?**
   Si on ne précise pas si a est nul ou non alors on a deux cas possibles.

Si a et b sont nuls, l'équation admet une infinité de solutions : tout réel est solution et $S = \mathbb{R}$.
Si a est nul et b non nul, l'équation est impossible donc n'admet aucune solution ; $S = \{\} = \phi$.

2. **Définir une équation du premier degré à deux inconnues.**
Une équation du premier degré à deux inconnues est une relation du type $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels donnés, $a, b \neq 0$ et où x et y sont les inconnues réelles.
Dans un repère cartésien du plan, comment se représente graphiquement une telle équation ? Répondre de façon précise en envisageant tous les cas possibles.
Si a et b sont non nuls, cette équation se représente graphiquement par une droite oblique par rapport aux axes du repère.
Si on ne précise pas que a et b sont non nuls, on a les cas suivants :
1) si $a = 0$ mais $b \neq 0$ alors la droite est parallèle à l'axe des abscisses
2) si $a \neq 0$ mais $b = 0$ alors la droite est parallèle à l'axe des ordonnées
3) si $a = b = 0$ l'équation n'est plus celle d'une droite.

3. **Définir une équation du second degré à une inconnue.**
Une équation du second degré à une inconnue est une relation du type $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont des réels donnés, $a \neq 0$ et x est l'inconnue réelle.
Comment résout-on une équation de ce type ?
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si $\Delta > 0$, l'équation a 2 solutions différentes $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Si $\Delta = 0$, l'équation a 2 solutions égales $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$
Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

4. a) **L'équation $8x^3 + 1 = 0$ est-elle du second degré à une inconnue ?**
Non, cette équation n'est pas du second degré puisqu'elle a un terme en x^3.
b) **Si oui, la résoudre en appliquant le processus que vous avez indiqué ci-dessus. Si non, de quel type d'équation s'agit-il ?**
Cette équation est une équation du troisième degré.
c) **Comment peut-on décrire le premier membre ?**
Le premier membre est une somme de deux cubes.
d) **Quelles sont les formules faisant intervenir ce type de termes ?**

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

e) **Quels sont les processus possibles pour résoudre ce type d'équation ?**
On peut travailler en factorisant le premier membre ou en retirant 1 dans les 2 membres puis en extrayant la racine cubique des 2 membres.
f) **Parmi ceux-ci, lequel choisissez-vous ?**
La deuxième méthode est la plus rapide.
g) **Résoudre l'équation sans oublier d'indiquer les liens entre les équations et sans oublier de conclure.**
On a

$$8x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = -1 \Leftrightarrow (2x)^3 = (-1)^3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{ \dfrac{-1}{2} \right\}$.

5. **Soit l'équation $x - \frac{1}{x} = 1$.**
a) **Quelle différence fondamentale y a-t-il avec les deux équations précédentes ?**
L'inconnue se trouve au dénominateur.
b) **Comment appelle-t-on une équation de ce type ?**
Une équation de ce type est une équation fractionnaire.
c) **Que doit-on préciser avant toute chose ?**
On doit préciser les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'équation est définie.
d) **Quelle(s) opération(s) doit-on effectuer ensuite ?**
On réduit les deux membres au même dénominateur puis on multiplie les 2 membres par le dénominateur obtenu.
e) **Quel type d'équation obtient-on alors ?**
On obtient une équation entière. Dans ce cas-ci elle est du second degré.
f) **La résoudre sans oublier de conclure.**
On a
$$x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} = \frac{x}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$
Comme $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ les solutions sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

III. Valeur absolue et équations (x est l'inconnue réelle)

1. **Définir en français et en symboles mathématiques la valeur absolue d'un réel.**
La valeur absolue d'un réel est le nombre lui-même s'il est positif et son opposé s'il est négatif.
Si $|x|$ désigne la valeur absolue du réel x, on a
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

2. a) **Si le réel est $x - 1$, définir la valeur absolue de $x - 1$.**
La valeur absolue du réel $x - 1$ est
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x-1 \geq 0 \\ -x+1 & \text{si} \quad x-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$
b) **Dans ce cas, quelle est la valeur de x qui joue un rôle différent des autres valeurs ?**
La valeur de x qui joue un rôle différent des autres valeurs est 1.
c) **Répondre aux mêmes questions en considérant le réel $x^2 - 1$.**
La valeur absolue du réel $x^2 - 1$ est
$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x^2-1 \geq 0 \\ -x^2+1 & \text{si} \quad x^2-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
Les valeurs de x qui jouent un rôle différent des autres valeurs sont -1 et 1.

3. a) **Si deux réels ont la même valeur absolue, que peut-on dire de ces réels ? Exprimer la réponse à cette question en français et en symboles mathématiques.**
Deux réels qui ont la même valeur absolue sont égaux ou opposés.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, |a| = |b| \Leftrightarrow a = b \quad \text{ou} \quad a = -b.$$

b) **Résoudre** $\left|-x + \dfrac{1}{2}\right| = |-x|$
L'équation est équivalente à

$$-x + \frac{1}{2} = -x \quad \text{ou} \quad -x + \frac{1}{2} = x.$$

La première équation est impossible et la seconde a pour solution $x = \frac{1}{4}$.
L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

4. a) **Si on prend la valeur absolue d'un réel, quel type de réel obtient-on ?**
La valeur absolue d'un réel est toujours un réel positif ou nul.
b) **Que peut-on dire de l'équation** $||x| - |x^2|| + 2 = 0$ **? Pourquoi ?**
Cette équation est impossible puisque son premier membre vaut au moins 2.

5. a)**Si x est un réel et n un naturel non nul, que peut-on dire du signe de x^{2n} ? de x^{2n+1} ?**
Le réel x^{2n} est toujours positif ou nul tandis que x^{2n+1} a le même signe que x.
b) **En tenant compte de ces renseignements, que vaut** $|x^{2n}|$ **?** $|x^{2n+1}|$ **?**
Dès lors, $|x^{2n}| = x^{2n}$ et $|x^{2n+1}| = \begin{cases} x^{2n+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x^{2n+1} & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$

6. **Résoudre l'équation** $||x| - |x^2|| - 2 = 0$
Comme $|x^2| = |x|^2$, en posant $|x| = y$ l'équation s'écrit

$$|y - y^2| = 2 \Leftrightarrow y - y^2 = 2 \text{ ou } y - y^2 = -2 \Leftrightarrow y^2 - y + 2 = 0 \text{ ou } y^2 - y - 2 = 0.$$

La première équation est impossible ($\Delta < 0$ avec y réel).
Pour la seconde, comme $\Delta = 1 + 8 = 9$, on a $y_1 = \frac{1+3}{2} = 2$, $y_2 = \frac{1-3}{2} = -1$. Cette dernière valeur est à rejeter car $y \geq 0$.
Dès lors, $y = |x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.
L'ensemble des solutions est donc l'ensemble $S = \{-2,\ 2\}$.

IV. Résolution d'inéquations (x est l'inconnue réelle)

1. **Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue et celle d'une inéquation du même type ?**
   Quand on multiplie ou divise les 2 membres d'une inéquation par un même réel on doit en connaître le signe. Si le réel est strictement positif, l'inégalité conserve le même sens ; s'il est strictement négatif, l'inégalité change de sens.

2. **Comment résout-on une inéquation à une inconnue d'un degré autre que le premier ? Décrire de façon précise les différentes étapes de la résolution.**
   On ramène tous les termes dans un même membre puis on factorise l'expression obtenue (après avoir réduit au même dénominateur si nécessaire) et on étudie le signe de l'expression factorisée dans un tableau de signe.

3. **Que sait-on du signe**
   a) **d'un binôme du premier degré ?**
   Le binôme $ax+b$ a le même signe que a si $x > -\frac{b}{a}$ et le signe contraire de celui de a si $x < -\frac{b}{a}$.
   b) **d'un trinôme du second degré ?**
   L'étude du signe du trinôme ax^2+bx+c nécessite de déterminer la valeur de Δ.
   Si $\Delta > 0$, le trinôme a le même signe que a sauf entre les 2 zéros où il a le signe contraire.
   Si $\Delta = 0$, le trinôme a le même signe que a pour tout $x \neq \frac{-b}{2a}$.
   Si $\Delta < 0$, le trinôme a le même signe que a pour tout x.

4. **Quelle différence fondamentale existe-t-il entre la résolution d'une équation fractionnaire et celle d'une inéquation fractionnaire ?**
   Dans le cas d'une inéquation fractionnaire, on conserve le dénominateur car son signe a une influence sur le signe de la fraction.

5. **Si on a** $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$ $(a, b \in \mathbb{R}_0)$ **peut-on toujours dire que cette inégalité est équivalente à** $a > b$ **?**
   Non.
   a) **Si oui, le prouver.**
   b) **Si non, donner un contre-exemple et dire dans quel(s) cas cette équivalence pourrait être correcte.**
   On a $\frac{-1}{2} < \frac{1}{10}$ par exemple mais on n'a pas -2 supérieur à 10. Cette équivalence est correcte si et seulement si les réels sont de même signe.

6. **Résoudre l'inéquation** $\dfrac{1}{1-x} > \dfrac{1}{-x+2}$ **en n'oubliant pas de conclure.**
   L'inéquation est définie pour tout réel différent de 1 et 2. Elle est équivalente à

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{-x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+2-1+x}{(1-x)(-x+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1-x)(-x+2)} > 0 \Leftrightarrow (1-x)(-x+2) > 0$$

   puisque le numérateur est strictement positif.
   Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$.

7. **Si la valeur absolue d'un réel est**
   a) **supérieure à un réel strictement positif donné, que peut-on dire de l'un par rapport à l'autre ?**
   Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$. Si $|a| > b$ alors $a < -b$ ou $a > b$.
   b) **même question en remplaçant "supérieure" par "inférieure".**
   Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$. Si $|a| < b$ alors $-b < a < b$.

8. **Résoudre l'inéquation $|2x - 1| > 2$.**
   L'inéquation est équivalente à $2x - 1 < -2$ ou $2x - 1 > 2 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ ou $x > \frac{3}{2}$.
   Dès lors, l'ensemble des solutions est l'ensemble $S =]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$.

9. a) **Quand l'expression $\dfrac{1}{|-x^2+3+2x|}$ est-elle définie ? Quel est alors son signe ?**
   L'expression est définie pour tout réel différent de -1 et 3. Lorsqu'elle est définie, cette expression est positive.
   b) **Si l'inéquation $\dfrac{1}{x-3} \geq \dfrac{1}{|-x^2+3+2x|}$ possède au moins une solution, à quel ensemble (différent de $\mathbb{R}$) appartient-elle assurément ?**
   Si l'inéquation possède une solution, cette solution appartient nécessairement à $]3, +\infty[$ car le premier membre doit obligatoirement être positif puisqu'il est supérieur au second qui est positif.
   c) **Résoudre cette inéquation.**
   Si $x > 3$, l'inéquation s'écrit

$$\frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x^2-2x-3} \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-3)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-1}{(x-3)(x+1)} \geq 0$$

   et puisque $x - 3 > 0$, elle est équivalente à $\dfrac{x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x \geq 0$.
   Dès lors l'ensemble des solutions est $S =]3, +\infty[$ puisque $x > 3$.

V. Racines de réels et puissances

1. a) **Pour quels réels une racine d'indice pair est-elle définie ? Quel est le signe de sa valeur ?**
   Une racine d'indice pair est définie pour tout réel positif et sa valeur est un réel positif.
   b) **Mêmes questions dans le cas d'une racine d'indice impair.**
   Une racine d'indice impair est définie pour tout réel et sa valeur est un réel de même signe que celui du radicand.
   c) **Que valent (i) $\sqrt{(-3)^4}$ (ii) $\sqrt[3]{(-\pi)^3}$?**
   On a $\sqrt{(-3)^4} = 9$ et $\sqrt[3]{(-\pi)^3} = -\pi$.

2. a) **Pour quelles valeurs de x la racine $\sqrt{9x^2}$ est-elle définie ?**
   La racine $\sqrt{9x^2}$ est définie pour tout réel.
   b) **Peut-on dire que $\sqrt{9x^2} = 3x$? Justifier votre réponse.**
   Non car le premier membre est positif alors que le second est positif ou négatif suivant la valeur de x.
   c) **Si x est un réel négatif, que vaut $\sqrt{9x^2}$?**
   Si x est un réel négatif alors $\sqrt{9x^2} = 3|x| = -3x$.

3. a) **Ecrire sous la forme la plus simple possible $(-|(-x^4)|)^3$ si x est un réel négatif.**
L'expression $(-|(-x^4)|)^3$ vaut $-x^{12}$.
b) **L'expression $(-|(-x)^4|)^3$ est-elle différente de celle ci-dessus ? Si oui, que vaut-elle ? Si non, pourquoi ?**
Non car $(-x)^4 = x^4$ et $|-x^4| = |x^4|$.
c) **Si n est un naturel non nul, comparer les réels $(-x)^{2n}$ et $-x^{2n}$: sont-ils égaux ou différents ? Justifier votre réponse.**
Ces réels ne sont égaux que si $x = 0$ sinon le premier est positif tandis que le second est négatif.
d) **Même question avec $(-x)^{2n+1}$ et $-x^{2n+1}$.**
Ces réels sont égaux pour tout réel x.

VI. Sommes et symboles sommatoires

1. a) **On considère la somme $s_1 = 1+3+5+7+9$. Exprimer en français la somme considérée.**
C'est la somme des 5 premiers naturels impairs.
b) **Comment note-t-on de façon générale un terme de ce type ?**
On peut le noter $2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
c) **Ecrire cette somme à l'aide d'un symbole sommatoire.**
On peut noter cette somme sous la forme $\displaystyle\sum_{j=0}^{4}(2j+1)$ par exemple.

2. a) **On considère la somme $s_2 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Comment caractériser chacun des termes de cette somme sans tenir compte de son signe ?**
Chaque terme de la somme est une puissance de $\frac{1}{2}$.
b) **Comment, dans une somme, peut-on passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif ?**
On peut passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif grâce à un facteur du type $(-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
c) **Ecrire s_2 à l'aide d'un symbole sommatoire.**
On peut noter cette somme sous la forme $\displaystyle\sum_{j=1}^{4}(-1)^j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}$ par exemple.

3. **On considère la somme $S_1 = \displaystyle\sum_{j=2}^{5}(-2)^{2j-1}$.**
a) **Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?**
Cette somme comporte 4 termes.
b) **Que vaut le terme correspondant à $j = 3$?**
Le terme correspondant à $j = 3$ vaut $(-2)^5 = -32$.
c) **Que vaut cette somme ?**
Cette somme vaut
$$(-2)^3+(-2)^5+(-2)^7+(-2)^9 = (-2)^3(1+(-2)^2+(-2)^4+(-2)^6) = (-8)(1+4+4^2+4^3)$$
$$= (-8)\ .\ \frac{1-4^4}{1-4} = (-8)\ .\ \frac{255}{3} = (-8).85 = -680.$$
d) **Si j variait de 2 à 20, quelle formule pratique pourrait-on utiliser pour calculer la somme ? L'appliquer sans calculer le résultat numérique final.**

On utiliserait la formule

$$\sum_{m=0}^{M-1} q^m = \begin{cases} \frac{1-q^M}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ M & \text{si} \quad q = 1 \end{cases}$$

La somme

$$\sum_{j=2}^{20} (-2)^{2j-1} = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^{20} 4^j = -\frac{1}{2} \, . \, 4^2 \sum_{j=0}^{18} 4^j = (-8) \frac{1-4^{19}}{1-4} = \frac{8}{3} \, . \, (1-4^{19}).$$

4. **On considère la somme $S_2 = \sum_{l=0}^{4} (\pi)^2$.**

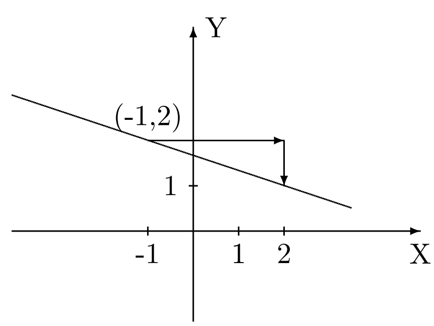
a) **Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?**
Cette somme comporte 5 termes.
b) **Que vaut le terme correspondant à $l = 3$?**
Le terme correspondant à $l = 3$ vaut π^2.
c) **Que vaut cette somme ?**
Cette somme vaut $5\pi^2$.

VII. Equations cartésiennes de droites

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. **Quelle est la forme canonique de l'équation cartésienne d'une droite dans le plan ? Indiquer ce que représente chacune des lettres utilisées.**
La forme canonique de l'équation cartésienne d'une droite dans le plan est donnée par $ax + by + c = 0$ où a, b, c sont des réels, a et b n'étant pas simultanément nuls.

2. a) **Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et de coefficient angulaire m (x_1, y_1, m sont des réels) ?**
L'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et de coefficient angulaire m est $y - y_1 = m(x - x_1)$.
b) **Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes (a, b), quel lien existe-t-il entre m et (a, b) ? a et b peuvent-ils être des réels quelconques ? Expliquer.**
Le coefficient angulaire m est égal à $\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$.
c) **Sans en déterminer l'équation cartésienne, représenter graphiquement la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes $(-1, 2)$ et de coefficient angulaire $-\frac{1}{3}$.**



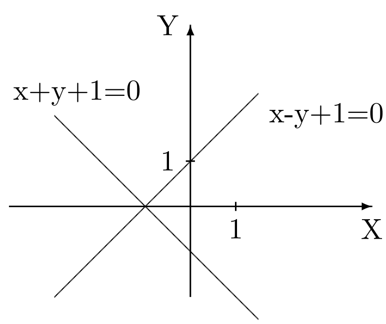
3. a) **Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par les points distincts de coordonnées cartésiennes respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ? Envisager tous les cas possibles.**
L'équation cartésienne d'une droite passant par les points distincts de coordonnées cartésiennes respectives (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ si } x_2 - x_1 \neq 0.$$

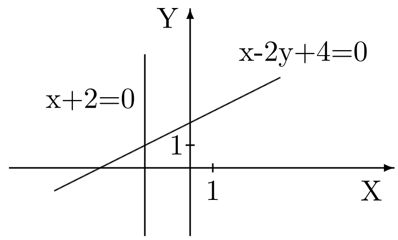
Si $x_1 = x_2$ alors la droite a pour équation cartésienne $x = x_1$.
b) **Si cette droite a pour vecteur directeur le vecteur de composantes (a, b), quel lien existe-t-il entre (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (a, b) ?**
Le vecteur de composantes (a, b) est un multiple non nul du vecteur de composantes $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

4. **Quelle est l'équation cartésienne d'une droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et parallèle à**
(a) **l'axe des abscisses ?**
L'équation cartésienne de cette droite est $y = y_1$.
(b) **l'axe des ordonnées ?**
L'équation cartésienne de cette droite est $x = x_1$.

5. a) **Si deux droites non parallèles aux axes sont**
(i) **orthogonales entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?**
Le produit des coefficients angulaires de 2 droites non parallèles aux axes et orthogonales entres elles est égal à -1.
(ii) **parallèles entre elles, que peut-on dire de leurs coefficients angulaires ?**
Les coefficients angulaires de 2 droites non parallèles aux axes et parallèles entres elles sont égaux.
b) **Donner l'équation cartésienne de la droite passant par le point de coordonnée $(0, 1)$ et orthogonale à la droite d'équation $x + y + 1 = 0$. Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.**
L'équation demandée est $x - y + 1 = 0$.



6. a) **Donner l'équation cartésienne de la droite passant par les points de coordonnées $(-2, 1)$ et $(2, 3)$ ainsi que celle de la droite passant par $(-2, 1)$ et $(-2, 0)$.**
Les équations demandées sont respectivement $x - 2y + 4 = 0$ et $x + 2 = 0$.
b) **Représenter graphiquement ces deux droites dans un même repère.**



7. a) **Soit la droite passant par le point de coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et dont un vecteur directeur a pour composantes (a, b). Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.**
Des équations paramétriques cartésiennes de cette droite sont

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_1 + ra \\ y = y_1 + rb \end{array}\right. , r \in \mathbb{R}$$

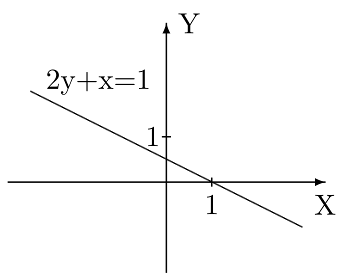
b) **On considère la droite d'équation cartésienne $x + y + 1 = 0$.**
- Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.
Un vecteur directeur de cette droite a pour composantes $(1, -1)$ (ou tout autre multiple non nul de ce couple).
- Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de cette droite.
Un point de cette droite a pour coordonnées $(0, -1)$ par exemple.
- Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.
Des équations paramétriques cartésiennes de cette droite sont

$$\left\{\begin{array}{l} x = r \\ y = -1 - r \end{array}\right. , r \in \mathbb{R}$$

- La droite passe par le point de coordonnées $(-\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$; à quelle valeur du paramètre correspond ce point ?
La droite passe par le point de coordonnées $(-\sqrt{2}, \sqrt{2} - 1)$ si $r = -\sqrt{2}$.

VIII. Résolution de systèmes linéaires

1. a) **Quels sont les processus les plus fréquemment utilisés pour résoudre les systèmes linéaires ?**
Les processus les plus fréquemment utilisés pour résoudre un système linéaire sont la substitution et les combinaisons linéaires.
b) **Si on considère l'équation $2y + x = 1$, représenter graphiquement l'ensemble des solutions dans un repère cartésien du plan. Quel est le nom de cette courbe ?**



Cette courbe est une droite.

c) **Résoudre le système** $\left\{ \begin{array}{l} y - x = 0 \\ 2y + x = 1 \end{array} \right.$

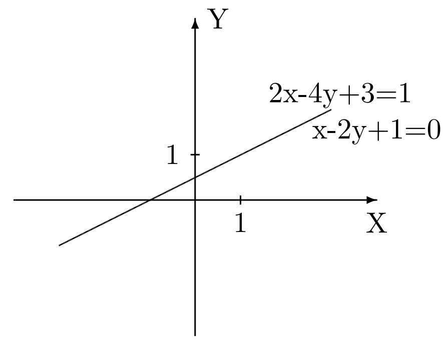
Ne pas oublier de mentionner l'ensemble des solutions.

L'ensemble des solutions du système est $S = \left\{ \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3} \right) \right\}$.

d) **Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?**

Ce système est constitué par les équations de 2 droites sécantes au point de coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

2. a) **Dans le plan, représenter graphiquement le système** $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 3 = 1 \end{array} \right.$



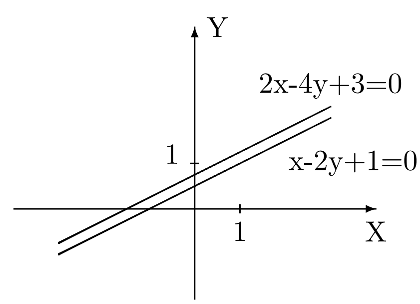
b) **Comment interpréter graphiquement ce système et son ensemble de solutions ?**

Ce système est constitué par les équations de 2 droites parallèles confondues. L'ensemble des solutions est l'ensemble des points de la droite.

c) **Résoudre ce système et donner son ensemble de solutions.**

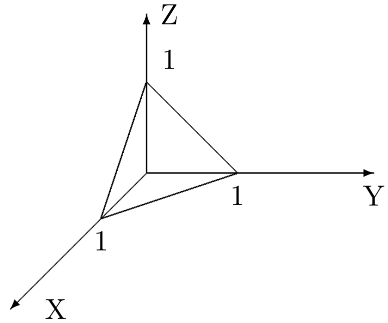
L'ensemble des solutions est $S = \{(2y - 1, y) : y \in \mathbb{R}\}$; le système est simplement indéterminé.

d) **Faire de même avec le système** $\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x - 4y + 3 = 0 \end{array} \right.$



Ce système est constitué par les équations de 2 droites parallèles distinctes. L'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

3. a) **Si on considère l'équation $y + x + z = 1$, comment peut-on représenter graphiquement les solutions dans un repère cartésien de l'espace ? Quel est le nom de cet élément ?**



L'équation donnée est celle d'un plan.

b) **Si on a un système formé de deux équations de ce type, quelles situations peut-on avoir graphiquement ? En déduire le type d'ensemble de solutions dans chacun des cas.**

Si les 2 plans sont

1) parallèles et distincts, l'ensemble des solutions est vide.

2) parallèles et confondus, l'ensemble des solutions est l'ensemble des points du plan. Le système est doublement indéterminé.

3) sécants, l'ensemble des solutions est l'ensemble des points de la droite d'intersection. Le système est simplement indéterminé.

c) **Résoudre** $\left\{\begin{array}{l} y+x+z=1 \\ y-x+2z=0 \end{array}\right.$

L'ensemble des solutions est $S=\left\{\left(\dfrac{1+z}{2}, \dfrac{1-3z}{2}, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\}$