1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

EXERCICES DE MATHÉMATIQUE
LISTE TYPE NUMÉRO 10
RÉPÉTITIONS 10 ET 11 (SEMAINES 11 ET 12) : SOLUTIONS

Version 18 novembre 2010 (V1 08/11/09)

I. Calculs d'intégrales

1. **Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

$$\int_{-1}^{2}(x^2+2x)\ dx \qquad \int_{-1}^{1} xe^{-x}\ dx \qquad \int_{0}^{1} xe^{-x^2}\ dx$$
$$\int_{1/2}^{3}\sqrt{3-\frac{x}{2}}\ dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3}\cos^2 x\ dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/3}\mathrm{tg}^2 x\ dx$$
$$\int_{0}^{\pi} x\cos^2 x\ dx \qquad \int_{0}^{\pi/2}\sin x\cos^2 x\ dx \qquad \int_{-2}^{4}\frac{x+3}{x+4}\ dx$$
$$\int_{0}^{1}\mathrm{arctg} x\ dx \qquad \int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\ dx \qquad \int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx$$

$\int_{-1}^{2}(x^2+2x)\ dx = 6$	$\int_{-1}^{1} xe^{-x}\ dx = -\frac{2}{e}$
$\int_{0}^{1} xe^{-x^2}\ dx = \frac{e-1}{2e}$	$\int_{1/2}^{3}\sqrt{3-\frac{x}{2}}\ dx = \frac{11\sqrt{11}-6\sqrt{6}}{6}$
$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cos^2 x\ dx = \frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{4}$	$\int_{\pi/4}^{\pi/3}\mathrm{tg}^2 x\ dx = \sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$
$\int_{0}^{\pi} x\cos^2 x\ dx = \frac{\pi^2}{4}$	$\int_{0}^{\pi/2}\sin x\cos^2 x\ dx = \frac{1}{3}$
$\int_{-2}^{4}\frac{x+3}{x+4}\ dx = 6-2\ln 2$	$\int_{0}^{1}\mathrm{arctg} x\ dx = \frac{\pi-2\ln 2}{4}$
$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\ dx = \frac{7\pi}{12}$	$\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\ dx = \frac{\pi}{4}$

2. **Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

$$\int_{0}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx \qquad \int_{0}^{1}\ln(x^2)\ dx \qquad \int_{-1}^{e} x\ln(|x|))\ dx$$
$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{9x^2+4}\ dx \qquad \int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{9x^2-4}\ dx \qquad \int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+1}\ dx$$
$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\ dx \qquad \int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x-3}\ dx \qquad \int_{\pi/3}^{+\infty}\sin(2x)\ e^{-x}\ dx$$

$\int_{0}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{x}}\ dx = \frac{28}{3}$	$\int_{0}^{1}\ln(x^2)\ dx = -2$	$\int_{-1}^{e} x\ln(|x|))\ dx = \frac{e^2+1}{4}$
$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{9x^2+4}\ dx = \frac{\pi}{12}$	$\int_{-\infty}^{-2}\frac{1}{9x^2-4}\ dx = \frac{1}{12}\ln 2$	$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+1}\ dx = 1$
$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\ dx = \frac{\pi}{4}$	$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x-3}\ dx = \frac{1}{4}\ln 5$	$\int_{\pi/3}^{+\infty}\sin(2x)\ e^{-x}\ dx = \frac{e^{-\frac{\pi}{3}}(\sqrt{3}-2)}{10}$

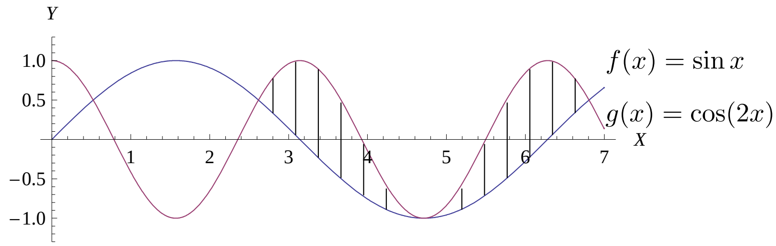
II. Calcul d'aires

1. **Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y) : x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right], y\in\mathbb{R} \text{ et } \sin x\le y\le\cos(2x)\right\}.$$

Donner aussi une représentation graphique de cet ensemble.

L'aire de la partie du plan donnée et hachurée dans la représentation graphique ci-dessous vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.



III. Divers

1. **Soit un réel x pour lequel $\mathrm{tg}(x/2)$ existe. Déterminer l'expression de $\sin x$ et de $\cos x$ en fonction de $\mathrm{tg}(x/2)$.**

   On a
   $$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi : k\in\mathbb{Z}\}.$$

2. **En cartographie, sur une carte de Mercator, l'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est φ, est donnée par**
   $$y(\varphi) = R\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos u}du.$$

   Montrer que
   $$y = R\ \ln\left(\left|\mathrm{tg}(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4})\right|\right).$$

   Cet exercice figure dans les notes de cours (et utilise l'exercice précédent).