1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique
Liste type numéro 11
Semaines 13 (et 14) : solutions

Version 26 novembre 2010 (V1 20/11/09)

I. Quelques manipulations

1. **L'équation différentielle** $(D_t y)^2 = 6y$ **est-elle linéaire ?**

   Cette équation n'est pas linéaire car une combinaison linéaire de solutions de cette équation n'est pas solution de l'équation.

2. **Montrer que la fonction** $g(t) = t^2 - 2t,\ (t \in \mathbb{R})$ **vérifie le système** $\left\{\begin{array}{l} (D_t y)^2 = 4(y+1) \\ y(0) = 0 \\ y(2) = 0 \end{array}\right.$

   On a $g(0) = 0$ et $g(2) = 0$ ainsi que $Dg(t) = 2t - 2$. En remplaçant Dy et y respectivement par Dg et g dans le système, les trois équations sont vérifiées.

3. **Montrer que**[1] **la fonction** $g(t) = \text{tg } t + \dfrac{1}{\cos t},\ t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$**, vérifie l'équation** $2\dfrac{dy}{dt} - y^2 = 1.$

   On a $Dg(t) = \dfrac{1 + \sin(t)}{\cos^2(t)}$ et en remplaçant $\dfrac{dy}{dt}$ et y respectivement par $Dg(t)$ et g dans l'équation donnée, celle-ci est vérifiée.

II. Equations différentielles, résolutions

1. **Résoudre les équations différentielles et les systèmes suivants, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

   $a)\ Df(x) + 2if(x) = 0$ $\qquad b) D^2 f = f$

   $c) D^2 f = 0$ $\qquad d)\ Df(x) - f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

   $e)\ Df(x) + 2f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ $\qquad f)\ D^2 f(x) + Df(x) - 2f(x) = xe^x + e^{2x}$

   $g)\ 4D^2 f(x) + f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$ $\qquad h)\ 4D^2 f(x) + 4Df(x) + f(x) = 1$

   Les solutions des équations ci-dessus sont les fonctions suivantes

   a) $f(x) = Ce^{-2ix},\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe

   b) $f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

   c) $f(x) = C_1 x + C_2,\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

   d) $f(x) = (C - \ln(1 + e^{-x}))e^x,\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe

   e) $f(x) = (C - \ln(e^x + 1))e^{-2x} + e^{-x},\ x \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe

   f) $f(x) = (C_1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9})e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

   g) $f(x) = C_1 \cos(\frac{x}{2}) + C_2 \sin(\frac{x}{2}) + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\cos(x) - \frac{1}{30}\cos(2x),\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

   h) $f(x) = (C_1 x + C_2)e^{-\frac{x}{2}} + 1,\ x \in \mathbb{R}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes

2. **Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un « taux » proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note y_0. On obtient ainsi l'équation différentielle**

   $$Dy(t) = k(y - y_0)$$

   où k est une constante strictement négative. Cette équation est appelée « Newton's law of cooling » et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.

1. Les dérivées première et seconde de $f(x),\ x \in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx},\ \frac{d^2 f}{dx^2}$

Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(t) = Ce^{kt} + y_0,\ t \in \mathbb{R}$ où C est une constante arbitraire complexe.
Comme $k < 0$, on a $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.

III. Equations différentielles linéaires à coefficients constants, du second ordre, avec conditions initiales

1. **Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille**

$$\begin{cases} 4D^2 f(x) - f(x) = x + 1 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 0 \end{cases}$$

La solution du système est la fonction

$$f(x) = -\frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}} + \frac{3}{2}\, e^{\frac{x}{2}} - x - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

2. **Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.**

$$4D^2 f(x) - Df(x) = x$$

Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1.

Les solutions de cette équation sont les fonctions

$$f(x) = C_1 + C_2 e^{\frac{x}{4}} - \frac{x^2}{2} - 4x,\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires complexes.
La solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1 est la fonction

$$f(x) = -\frac{29}{2} + 20e^{\frac{x-1}{4}} - \frac{x^2}{2} - 4x,\ x \in \mathbb{R}.$$

IV. Divers

1. **Déterminer la valeur de la constante c de telle sorte que la fonction $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle**

$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

La constante vaut $\frac{1}{4}$.

2. **Soit L la longueur d'un pendule et soit T sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant T et L est l'équation différentielle**

$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$

Montrer que cela implique que la période T est proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $T(L) = C\sqrt{L},\ L \in]0, +\infty[$ où C est une constante arbitraire strictement positive.
La période T est donc bien proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.