1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 2
Répétition 2 : correction

Version 28 septembre 2010(V1 : 07/09/09)

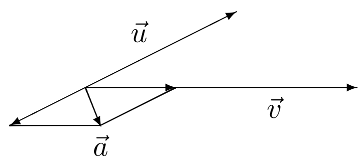
I. Trigonométrie

1. a) Voir cours p 23
   b) Voir cours p 23
   c) Voir cours p 25, 26 et 28
   d) Voir cours p 23 et 24.
   La tangente et la cotangente sont positives dans les 1er et le 3eme quadrants, négatives dans les 2 autres.
   e) Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, on travaille dans le 4eme quadrant
   f)
$$\sin(x) = \frac{-3}{5}, \quad \cos(x) = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{cotg}(x) = \frac{-4}{3}.$$

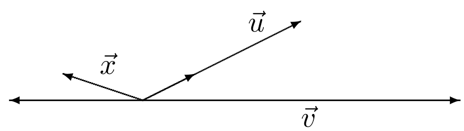
2. a)
$$\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
   b)
$$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
   c) Voir cours p 26 et 27
   d) L'expression est définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$
   e) En simplifiant cette expression vaut 0.
3. a) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
   b) Cette expression vaut 1.
4. a) Voir cours p 26
   b) $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin(x)\sin(y)$
   c) —
5. a) Voir cours p 25 et 26
   b) Si les sinus de 2 réels sont égaux alors, à un multiple entier de 2π près, ces 2 réels sont égaux ou supplémentaires.
   c)
$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$
   d) Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$.
6. a) Si les cosinus de 2 réels sont égaux alors, à un multiple entier de 2π près, ces 2 réels sont égaux ou opposés.
   b)
$$S = \left\{\frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$
   c) Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$.
7. a) Si un produit de 2 facteurs est positif alors ces 2 facteurs sont de même signe.
   b) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
   c)
$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]\right)$$
   d) Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

II. Vecteurs - Produits scalaire et vectoriel

1. a) Voir cours p 19
   b) Composantes de $\overrightarrow{OA}(3,2)$ et de $\overrightarrow{OB}(4,-1)$
   c) Composantes de $\overrightarrow{AB}(1,-3)$
2. a) Composantes de $\vec{a}$ dans la base $\vec{u},\ \vec{v}$: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$.
   b) Représenter $\vec{a}$.

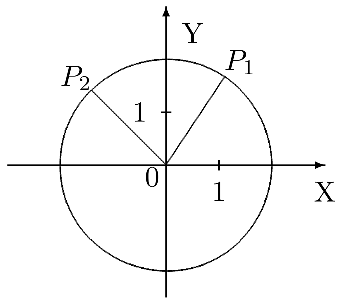


   c) On considère le vecteur $\vec{x}$. Le décomposer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis en donner les composantes dans cette base.



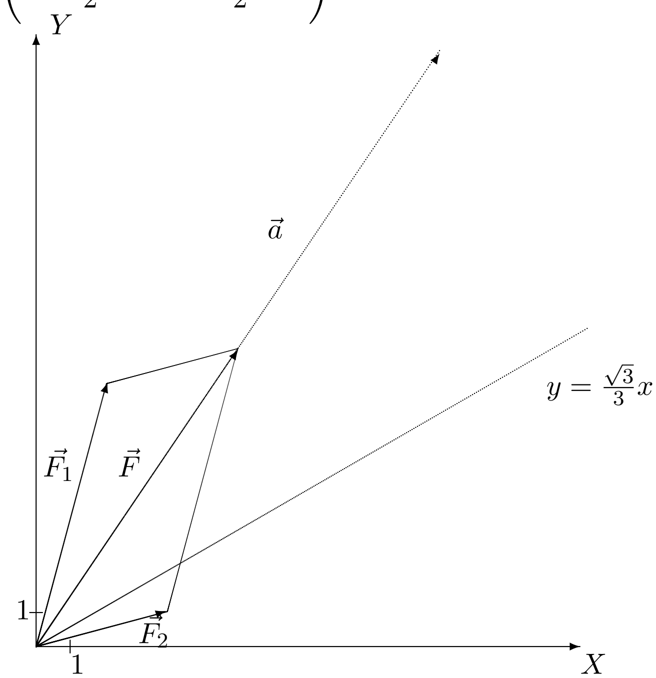
   Les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\vec{u},\ \vec{v}$ sont $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.
3. a) Composantes de $\vec{a}$ dans la base $\vec{u_1},\ \vec{u_2},\ \vec{u_3}$: $(2, \frac{1}{2}, 0)$
   b) Composantes de $\vec{b}$ dans cette base $(1,-1,1)$
   c) Voir cours p 33.
   Le produit scalaire de 2 vecteurs dont on connaît les composantes dans une base orthonormée est égal à la somme des produits des composantes de même nom. Le résultat est un réel.
   d) Le produit scalaire $\vec{a} \bullet \vec{b}$ vaut $\dfrac{3}{2}$.
   e) Voir cours p 38. Le résultat est un vecteur.
   f) Le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$ a pour composantes $\left(-\dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{5}{2}\right)$.
   g) Le produit scalaire de 2 vecteurs est commutatif.
   h) Le produit vectoriel n'est pas commutatif ; il change de signe si on permute l'ordre des facteurs (antisymétrie).
   i) Les composantes de $\vec{x}$ sont $\left(\dfrac{5}{2}, -4, -\dfrac{1}{2}\right)$, celles de $\vec{y}$ sont $\left(3, \dfrac{3}{4}, 0\right)$ et celles de $\vec{z}$ sont $\left(\dfrac{5}{4}, -5, \dfrac{17}{4}\right)$.

4. a)



b) Coordonnées de $P_1(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$
c) Coordonnées de $P_2(r\cos(\theta+60°), r\sin(\theta+60°))$.
d) Coordonnées de $P_2\left(\dfrac{x_1-\sqrt{3}y_1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}x_1+y_1}{2}\right)$

5. a)



b) Si m est le coefficient angulaire de la droite et $\theta \in [0, \pi]$ la mesure de l'angle que cette droite forme avec l'axe des abscisses alors $m = \mathrm{tg}(\theta)$.
c) La droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ fait un angle de 30° avec l'axe des abscisses.
d) L'angle formé par $\overrightarrow{F_1}$ avec l'axe des abscisses vaut 75° ; celui formé par $\overrightarrow{F_2}$ vaut 15°.
e) Dans la base correspondant au repère orthonormé, les composantes de $\overrightarrow{F_1}$ sont $(2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1), 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1))$ et celles de $\overrightarrow{F_2}$ sont $(\sqrt{2}(\sqrt{3}+1), \sqrt{2}(\sqrt{3}-1))$.
f) La résultante de ces 2 forces a pour composantes $(\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1), \sqrt{2}(3\sqrt{3}+1))$.
g) Les composantes de l'accélération sont $(2\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1), 2\sqrt{2}(3\sqrt{3}+1))$.
h) Les composantes d'un vecteur directeur de toute droite orthogonale à la droite donnée sont $(1, -\sqrt{3})$ (ou tout multiple non nul).
i) Voir cours p 32
j) La projection orthogonale demandée a pour composantes $(\sqrt{2}(\sqrt{3}-5), \sqrt{2}(5\sqrt{3}-3))$.