1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 3
Répétition 3 : correction

Version 29 septembre 2010(V1 23/09/09)

I. Les coniques

1. Soit un repère orthonormé du plan.
   a) L'équation canonique du cercle centré au point de coordonnées (x_1, y_1) et de rayon R est $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$.
   b) Si le cercle est centré à l'origine, l'équation devient $x^2 + y^2 = R^2$.
   c) Dans l'équation cartésienne d'un cercle, les coefficients des termes en x^2 et en y^2 sont égaux.
   d) Voir cours p. 40
   e) Pour le cercle, les coefficients des termes en x^2 et en y^2 sont égaux tandis que pour l'ellipse, ils sont différents mais de même signe.
   f) Voir cours p. 40 et 41.
   g) Pour l'ellipse, les coefficients des termes en x^2 et en y^2 sont de même signe tandis que pour l'hyperbole, ils sont de signes différents.
   h) Voir cours p. 41.
   i) Pour la parabole, l'une des variables est au carré et l'autre pas.

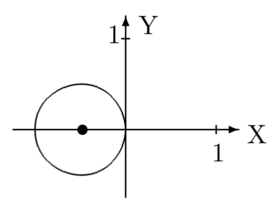
2. Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes

$$(1)\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 4 \qquad (2)\ x = y^2 + 1 \qquad (3)\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 4 \qquad (4)\ x^2 + x + y^2 = 0$$

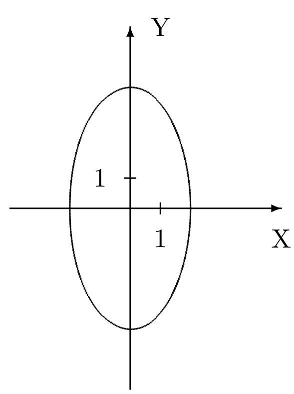
$$(5)\ x^2 = y^2 \qquad (6)\ y^2 - \frac{x^2}{4} = 4 \qquad (7)\ y = xy^2 \qquad (8)\ y^2 + \frac{x^2}{4} = 4$$

   Celle(s) qui pourrai(en)t être l'équation cartésienne
   a) d'un cercle est $x^2 + x + y^2 = 0$.
   b) d'une ellipse sont $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$ et $y^2 + \frac{x^2}{4} = 4$.
   c) d'une hyperbole sont $x^2 - \frac{y^2}{4} = 4$, $x^2 = y^2$ et $y^2 - \frac{x^2}{4} = 4$
   d) d'une parabole est $x = y^2 + 1$

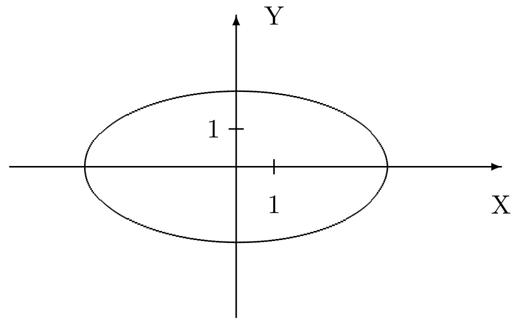
3. a) On a $x^2 + x = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$
   b)Les coordonnées du centre sont $(-\frac{1}{2}, 0)$ et la valeur du rayon $\frac{1}{2}$.



   c)Coordonnées des points d'intersection de $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$ avec les axes : $(0, 4),\ (0, -4),\ (2, 0)$ et $(-2, 0)$.

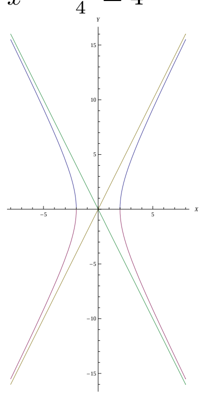


Coordonnées des points d'intersection de $y^2 + \frac{x^2}{4} = 4$ avec les axes : $(4,0),\ (-4,0),\ (0,2)$ et $(0,-2)$.

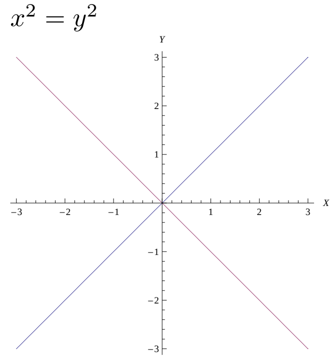


d) Voir cours p. 42.
Coordonnées des foyers de $x^2 + \frac{y^2}{4} = 4$: $(0, 2\sqrt{3})$ et $(0, -2\sqrt{3})$; l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Coordonnées des foyers de $y^2 + \frac{x^2}{4} = 4$: $(2\sqrt{3}, 0)$ et $(-2\sqrt{3}, 0)$; l'excentricité vaut $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
e) Voir cours p. 40, 41 et 43.
Considérons l'hyperbole d'équation $x^2 - \frac{y^2}{4} = 4$.
Coordonnées de ses points d'intersection avec l'axe des abscisses : $(2,0)$ et $(-2,0)$.
Coordonnées de ses foyers : $(2\sqrt{5}, 0)$ et $(-2\sqrt{5}, 0)$.
Equation cartésienne de ses asymptotes : $y = 2x$ et $y = -2x$.
Excentricité : $e = \sqrt{5}$.
L'équation $x^2 = y^2$ est celle d'une hyperbole dégénérée en ses asymptotes, les droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.
Considérons l'hyperbole d'équation $y^2 - \frac{x^2}{4} = 4$.
Coordonnées de ses points d'intersection avec l'axe des ordonnées : $(0,2)$ et $(0,-2)$.
Coordonnées de ses foyers : $(0, 2\sqrt{5})$ et $(0, -2\sqrt{5})$.
Equation cartésienne de ses asymptotes : $y = \frac{1}{2}x$ et $y = -\frac{1}{2}x$.
Excentricité : $e = \sqrt{5}$.
f)

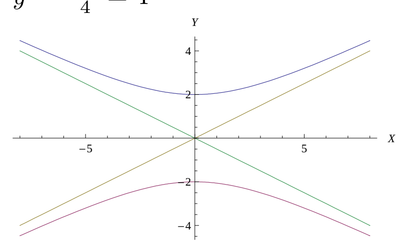
$x^2 - \frac{y^2}{4} = 4$



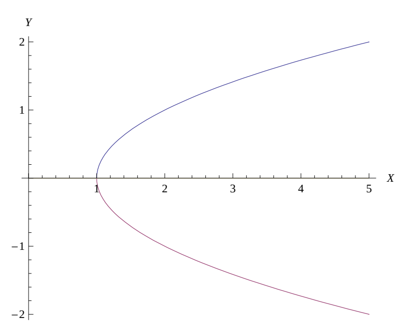
$x^2 = y^2$



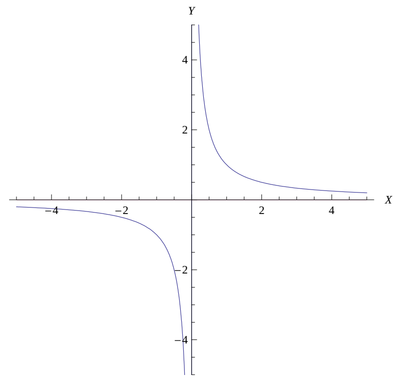
$y^2 - \frac{x^2}{4} = 4$



g) Voir cours p. 44.
Les coordonnées du foyer de la parabole d'équation $x = y^2 + 1$ sont$(\frac{5}{4}, 0)$ et son excentricité est égale à 1.



h) L'équation $y = xy^2$ n'est pas celle d'une conique puisque c'est une équation du troisième degré en x, y mais elle se factorise sous la forme $y(1 - xy) = 0$. Elle est donc équivalente à $y = 0$ ou $y = \frac{1}{x}$.

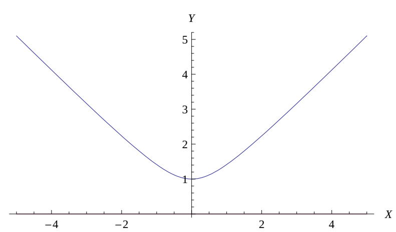


II. Représentation d'ensembles

1. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble** $\{(t, \sqrt{1+t^2}) : t \in \mathbb{R}\}$**.**
   a) Des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble sont

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}$$

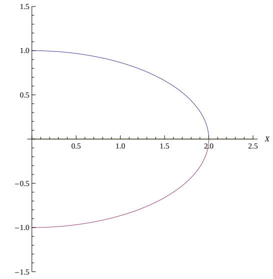
   b) Une équation cartésienne est $y = \sqrt{1+x^2}$.
   c) Cette équation est équivalente à $x^2 - y^2 = -1$ avec $y \geq 0$.
   d)



2. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble** $\{(2\sqrt{1-x^2}, x) : x \in [-1, 1]\}$**.**
   a) Des équations paramétriques de la courbe définie par cet ensemble sont

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2\sqrt{1-t^2} \\ y = t \end{array} \right. , \ t \in [-1, 1]$$

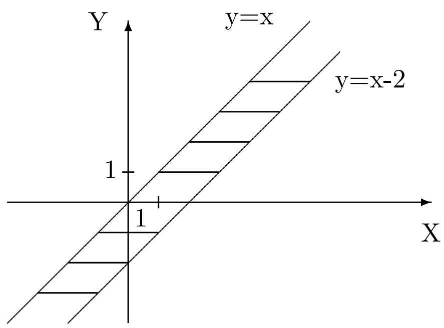
   b) Une équation cartésienne est $x = 2\sqrt{1-y^2}$ avec $y \in [-1, 1]$.
   c) Cette équation est équivalente à $x^2 + 4y^2 = 4$ avec $x \geq 0$.
   d)



3. **Dans un repère orthonormé, on considère la fonction f dont la représentation graphique a pour équation $y = f(x)$. Pour une même abscisse x du domaine de définition de f, on**

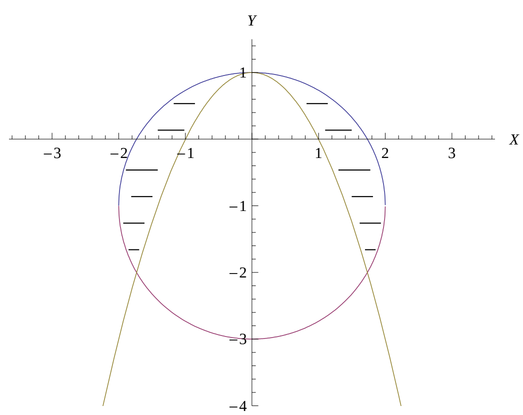
considère un point P_1 situé sous la courbe et d'ordonnée y_1, un point P_2 situé sur la courbe et d'ordonnée y_2 ainsi qu'un point P_3 situé au-dessus de la courbe et d'ordonnée y_3. Comparer $y_1,\ y_2,\ y_3$ à $f(x)$.
On a $y_1 < f(x)$, $y_2 = f(x)$ et $y_3 > f(x)$.

4. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**
$$\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, |x-y-1| \leq 1\}.$$
a) Si la valeur absolue d'un nombre vaut 1, ce nombre vaut 1 ou -1.
b) On a $|x-y-1| = 1 \Leftrightarrow x-y-1 = 1$ ou $x-y-1 = -1 \Leftrightarrow y = x-2$ ou $y = x$.
c) et d)



Les points des droites sont compris dans l'ensemble.

5. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**
$$\left\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ y \geq 1 - x^2 \text{ et } x^2 + 2y + y^2 \leq 3\right\}.$$

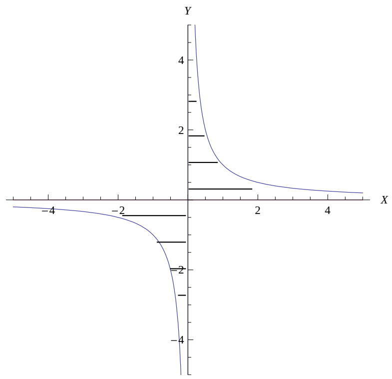


Les points des bords sont compris dans l'ensemble.

6. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**
$$\left\{(x,y) : x, y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{xy} \geq 1\right\}.$$

a) Les points des axes du repère n'appartiennent pas à l'ensemble.
b) Le produit xy est positif. Dès lors, x et y sont de même signe.
c) L'expression $\dfrac{1}{xy} \geq 1$ est équivalente à $xy \leq 1$ puisque le produit xy est positif.

d) et e)

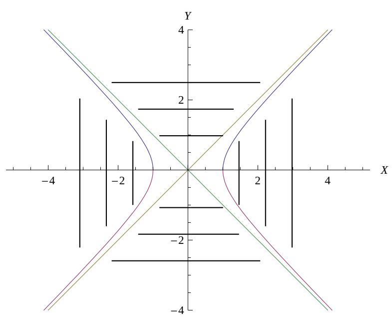


Les points de l'hyperbole sont compris dans l'ensemble mais pas ceux des axes.

7. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

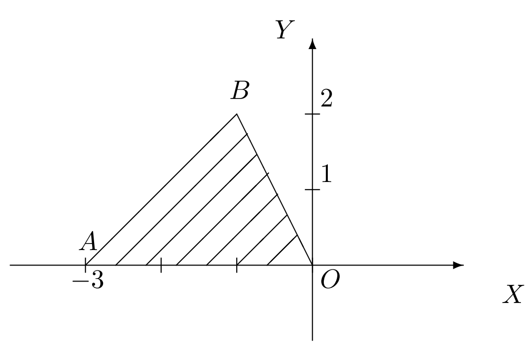
$$\left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x^2-y^2} \leq 1\right\}.$$

a) Les points des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$ n'appartiennent pas à l'ensemble.
b) Si $P_1(x,y)$ avec $x, y > 0$ appartient à l'ensemble, les points $P_2(-x,y)$, $P_3(-x,-y)$, $P_4(x,-y)$ appartiennnent aussi à l'ensemble puisque x et y apparaissent au carré.
d) La fraction $\dfrac{1}{x^2-y^2}$ est négative si et seulement si $x^2 - y^2 < 0 \Leftrightarrow -y < x < y$
c) e) f) et g)



Les points de l'hyperbole sont compris dans l'ensemble mais pas ceux des asymptotes.

8. **Décrire analytiquement l'ensemble E hachuré suivant, les points du bord étant compris dans l'ensemble.**



a) Coordonnées cartésiennes de A (-3,0), de B (-1,2) et de O (0,0).
b) L'équation cartésienne de la droite AB est $y = x + 3$; celle de BO est $y = -2x$ et celle de AO est $y = 0$.
c) On a $E = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0,\ y \leq x+3,\ y \leq -2x\}$.
d) L'ensemble de variation des ordonnées des points de E est $[0,2]$.

e) Si on fixe une valeur quelconque de y dans cet ensemble, l'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[y-3, -\frac{y}{2}]$.
f) On a $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,2],\ x \in [y-3, -\frac{y}{2}]\}$.
g) L'ensemble de variation des abscisses des points de E est $[-3, 0]$.
h) Si on fixe une valeur quelconque de x dans cet ensemble, on ne peut donner l'ensemble de variation des ordonnées des points de E. On doit partager cet ensemble en $[-3,-1] \cup [-1,0]$.
i) On a $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3,-1],\ y \in [0, x+3]\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,0],\ y \in [0,-2x]\}$.