1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 4
Répétition 4 : solutions

Version 11 octobre 2010(V1 03/10/09)

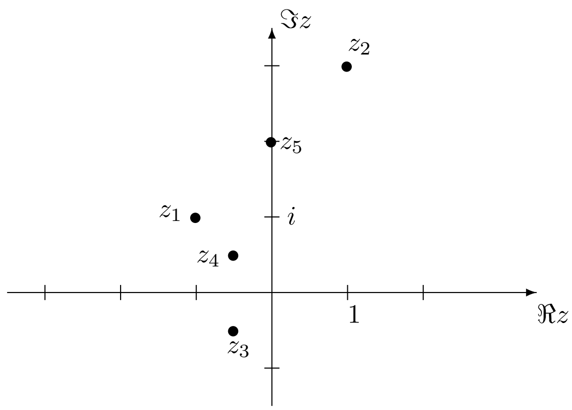
I. Exercices de base sur les nombres complexes

1. **Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)**

$$i-1, \quad (i-1)(1-2i), \quad \frac{1}{i-1}, \quad \frac{i^3}{i-1}, \quad (1+i)^2.$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = i-1$	-1	1	$-1-i$	$\sqrt{2}$
$z_2 = (i-1)(1-2i)$	1	3	$1-3i$	$\sqrt{10}$
$z_3 = \frac{1}{i-1}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-1+i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_4 = \frac{i^3}{i-1}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1-i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$z_5 = (1+i)^2$	0	2	$-2i$	2



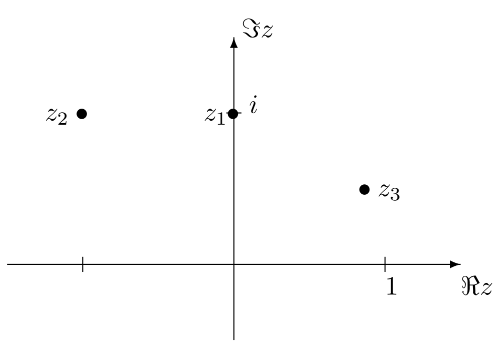
2. **Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)**

$$i, \quad i-1, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i).$$

On a

$$z_1 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad z_2 = i-1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

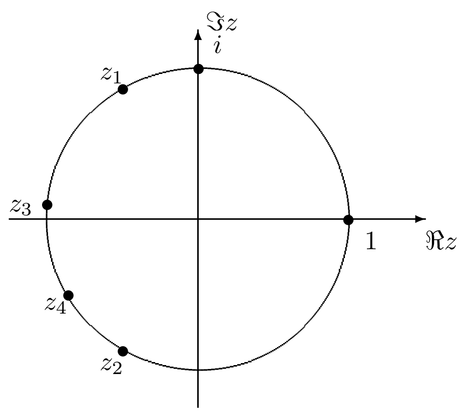


3. **On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les partie réelle, imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes ci-dessous. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire ») en supposant que α appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$**

$$\cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \frac{1}{\cos\alpha + i\sin\alpha}, \quad (\cos 1 + i\sin 1)(\cos\alpha + i\sin\alpha), \quad \sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha).$$

On a

z	$\Re z$	$\Im z$	$\overline{z}$	$\lvert z\rvert$
$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha - i\sin\alpha$	1
$z_2 = \frac{1}{\cos\alpha+i\sin\alpha}$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha + i\sin\alpha$	1
$z_3 = (\cos 1 + i\sin 1)(\cos\alpha + i\sin\alpha)$	$\cos(\alpha+1)$	$\sin(\alpha+1)$	$\cos(\alpha+1) - i\sin(\alpha+1)$	1
$z_4 = \sin(2\alpha) + i\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha)$	$\cos(2\alpha)$	$\sin(2\alpha) - i\cos(2\alpha)$	1



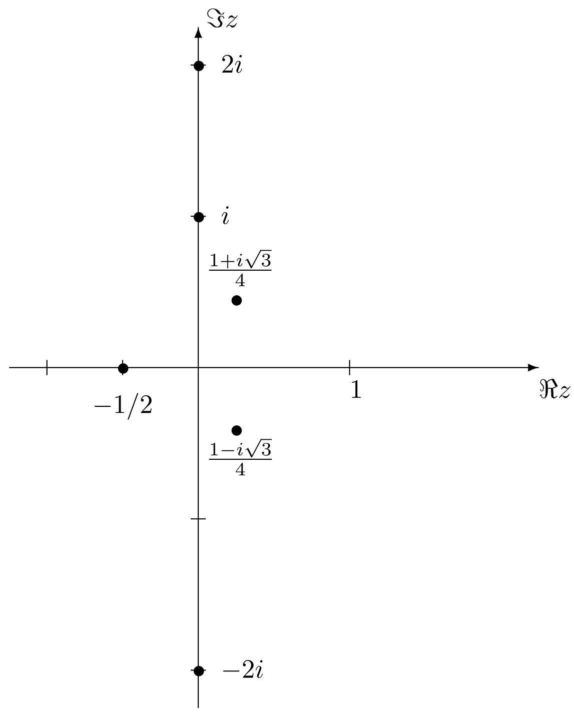
4. **Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y= axe imaginaire »)**

$$z^2 + 4 = 0, \quad 8z^3 + 1 = 0, \quad z^2 + iz + 2 = 0$$

L'ensemble des solutions de la première équation est $S = \{-2i, 2i\}$.
L'ensemble des solutions de la deuxième équation est

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\left(1 + i\sqrt{3}\right), \frac{1}{4}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\right\}$$

L'ensemble des solutions de la troisième équation est $S = \{-2i, i\}$.

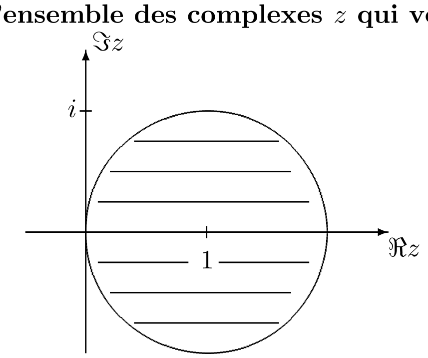


II. Divers

1. **Reprendre l'exercice II.4 de la liste 2 et l'interpréter en utilisant les nombres complexes.**

   Le point P_1 de coordonnées cartésiennes $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r > 0$ et $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ est le point-image du complexe $z_1 = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
   Le point P_2 de coordonnées cartésiennes $(r\cos(\theta + \frac{\pi}{3}), r\sin(\theta + \frac{\pi}{3}))$ est le point-image du complexe $z_2 = r(\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\theta + \frac{\pi}{3}))$.
   Si on multiplie z_1 par $z = \cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})$, on obtient z_2. Ainsi, la rotation de 60° dans le sens trigonométrique correspond à une multiplication du complexe z_1 par le complexe z.

2. **Représenter graphiquement l'ensemble des complexes z qui vérifient $|z - 1| \leq 1$.**



   Les points du cercle (le « bord ») sont compris dans l'ensemble.

3. **On donne l'ensemble A suivant du plan. Décrire cet ensemble à l'aide des coordonnées polaires.**

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \Re z \leq 0, \Im z \geq 0\}.$$

   On a

$$A = \left\{(r, \theta) : r \in]0, 2],\ \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right\}.$$

4. **On donne l'ensemble B suivant. Représenter graphiquement celui-ci en le hachurant.**

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi],\ \cos(2x) \le y \le \cos x\}.$$

Voici la représentation graphique : les points des bords sont compris dans l'ensemble.