1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

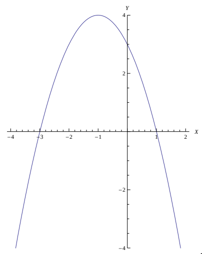
Exercices de mathématiques
Liste type numéro 5
Répétition 5 : solutions

Version 18 octobre 2010 (V1 11/10/09)

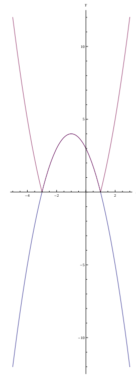
I. Exercices sur les éléments de base relatifs aux fonctions

1. **Représenter graphiquement les fonctions données explicitement ci-dessous, toutes définies sur $\mathbb{R}$**

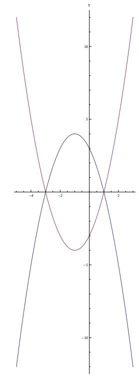
$$f_1(x) = -x^2 - 2x + 3, \quad f_2(x) = |-x^2 - 2x + 3|$$
$$f_3(x) = -f_1(x), \quad f_4(x) = f_1(x+1), \quad f_5(x) = f_1(x) + 1.$$



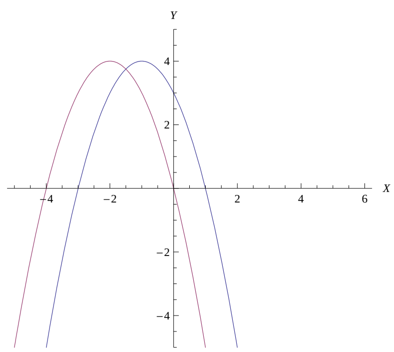
f_1



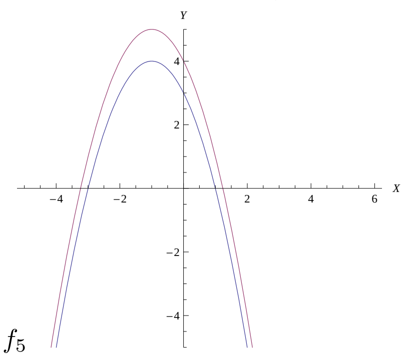
f_2



f_3



f_4

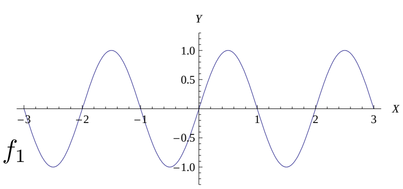


f_5

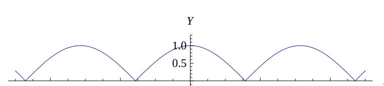
2. **Déterminer les domaines de définition, la parité, la périodicité et le graphique des fonctions données explicitement ci-dessous**

$$f_1(x) = \sin(\pi x), \quad f_2(x) = |\cos x|, \quad f_3(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad f_4(x) = \arcsin x, \quad f_5(x) = \arcsin(\sin x).$$

Fonction	dom(f)	Parité	Période
f_1	$\mathbb{R}$	impair	2
f_2	$\mathbb{R}$	pair	π
f_3	$\mathbb{R}$	pair	2π
f_4	$[-1, 1]$	impair	non périodique
f_5	$\mathbb{R}$	impair	2π

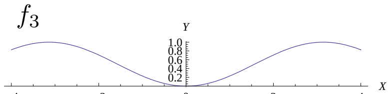


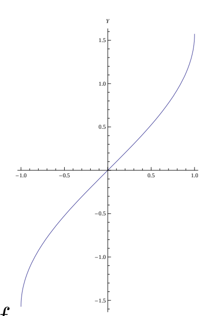
f_1



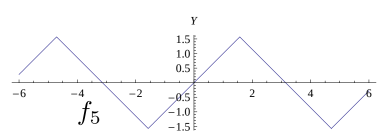
f_2

f_3





f_4



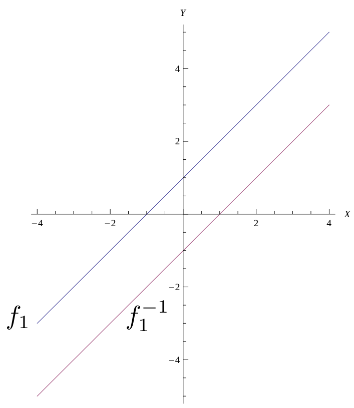
f_5

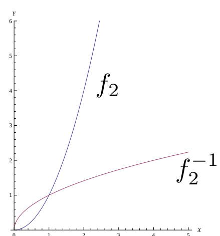
3. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous, ainsi que leur image (x est une variable réelle). Dans chaque cas, déterminer la fonction inverse, si elle existe. Représenter alors f et son inverse dans le même repère orthonormé.**

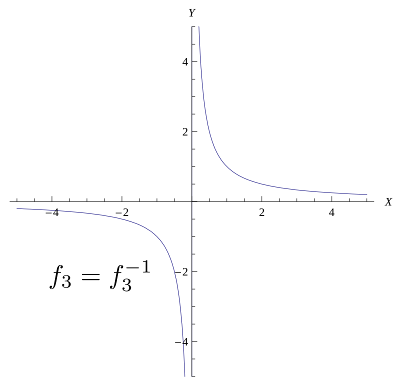
$$f_1(x) = x+1, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = \frac{1}{x}.$$

Fonction	$\mathrm{dom}(f)$	$\mathrm{im}(f)$	Fonction inverse
f_1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_1^{-1} : x \mapsto x-1$
f_2	$\mathbb{R}$	$[0,+\infty[$	pas d'inverse (cf. ci-dessous)
f_3	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f_3^{-1} : x \mapsto \frac{1}{x}$

Si on restreint le domaine de définition de f_2 à l'ensemble $[0,+\infty[$ par exemple alors la fonction admet une fonction inverse donnée par $f_2^{-1} :\ [0,+\infty[\to [0,+\infty[\ x \mapsto \sqrt{x}$.







4. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous**

$$\frac{1}{1-|x-1|}, \quad \ln(-x^2+2x+3), \quad \sqrt{\frac{1-x}{2-x}}, \quad \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}, \quad \ln(1-e^x)$$

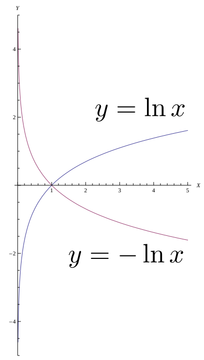
$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), \quad \arccos(x^2-1), \quad \mathrm{arctg}(\ln x)$$

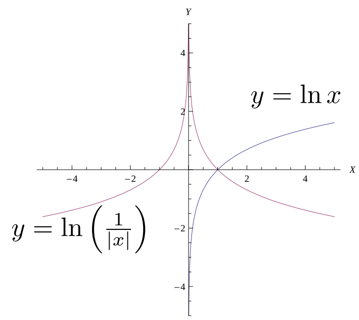
Fonction	$\mathrm{dom}(f)$
$\frac{1}{1-\lvert x-1\rvert}$	$\mathbb{R}\setminus\{0,\ 2\}$
$\ln(-x^2+2x+3)$	$]-1,3[$
$\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$	$]-\infty,1]\cup\ ]2,+\infty[$
$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}$	$]-\infty,1]$
$\ln(1-e^x)$	$]-\infty,0[$
$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	$\mathbb{R}$
$\arccos(x^2-1)$	$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$
$\mathrm{arctg}(\ln x)$	$]0,+\infty[$

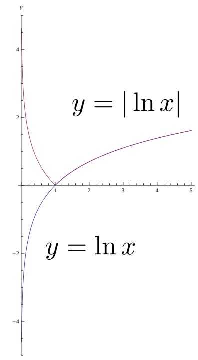
5. **Déterminer le domaine de définition des fonctions données explicitement ci-dessous et les représenter graphiquement (uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques de** $\ln$ **et de l'exponentielle).**

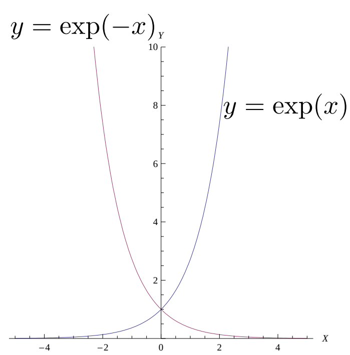
$$-\ln x, \quad \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |\ln x|, \quad \exp(-x), \quad \exp(x-1), \quad (\exp x)-1.$$

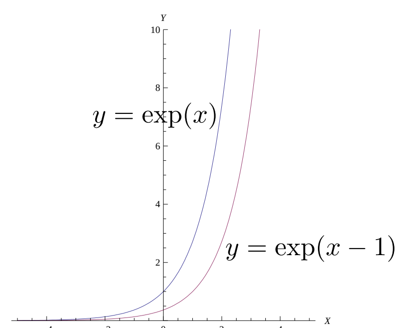
Le domaine de définition des fonctions $x \mapsto -\ln x$ et $x \mapsto |\ln x|$ est $]0,+\infty[$.
Le domaine de définition de la deuxième fonction ln est $\mathbb{R}_0$.
Le domaine de définition des trois fonctions exponentielles est $\mathbb{R}$.

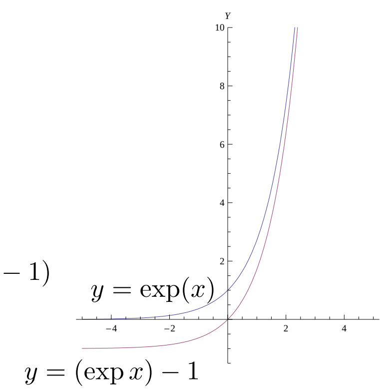












II. Décomposition en fractions simples

1. **Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**

$$\frac{1}{x^2+2x+1}, \quad \frac{x}{-x^2-2x+3}, \quad \frac{1}{x(x^2+2x+1)}$$

On a les décompositions suivantes

$$\frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \qquad \frac{x}{-x^2-2x+3} = \frac{-1}{4}\left(\frac{3}{x+3}+\frac{1}{x-1}\right),\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$$