1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématiques
Liste type numéro 6
Répétition 6 : solutions

Version 29 octobre 2010 (V1 15/10/09)

I. Décomposition en fractions simples (suite)

1. **Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.**

$$\frac{x^2}{2x+1},\quad \frac{x^2-1}{x^2+1},\quad \frac{x^3}{x^3-1}$$

On a les décompositions suivantes

$$\frac{x^2}{2x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2x+1)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \qquad \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{x^3}{x^3-1} = 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right),\ x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

II. Manipulation des fonctions élémentaires

1. **Simplifier les expressions suivantes au maximum**

$$\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) + \ln\left(\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)^2\right),\quad \mathrm{tg}\left(\ln(e^{\pi}/3)\right),\quad \exp(2\ln(2e)),$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right),\ \arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{7})\right),\ \mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right),\ \mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}(\pi)\right),\ \mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}(1)\right),\ \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\frac{5\pi}{4})\right).$$

On a

$$\ln\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) + \ln\left(\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\ln 3 - 3\ln 2 \qquad \mathrm{tg}\left(\ln(e^{\pi}/3)\right) = -\mathrm{tg}(\ln 3) \qquad \exp(2\ln(2e)) = 4\ e^2$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \qquad \arcsin\left(\sin(\frac{5\pi}{7})\right) = \frac{2\pi}{7} \qquad \mathrm{arctg}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}(\pi)\right) = \pi$$

$$\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}(1)\right) = 1 \qquad \mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\frac{5\pi}{4})\right) = \frac{\pi}{4}.$$

III. Exercices sur les limites des valeurs des fonctions

1. **On a**

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$$

Exprimer mathématiquement explicitement la définition qui « se cache » derrière cette succession de symboles (qui « résument » en fait la définition) et en donner une interprétation graphique.

Le domaine de définition du ln étant $]0, +\infty[$, cette notation correspond à

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } 0 < x \leq \eta \Rightarrow \ln x \leq -\varepsilon.$$