1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES
LISTE TYPE NUMÉRO 7
RÉPÉTITION 7 : SOLUTIONS

Version 29 octobre 2010 (V1 26/10/09)

0.Limites (exercices provenant de la liste précédente

1. **Se rappeler les limites relatives aux fonctions élémentaires et en déduire rapidement par exemple les quelques limites suivantes**

$$\lim_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x^2)}, \quad \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

Toutes les limites demandées ont un sens et on a

$$\lim_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 1^- \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x^2)} = 0^- \qquad \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}^+.$$

2. **Calculer (si possible) les limites suivantes, *sans appliquer le théorème de l'Hospital***

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{|1-x|}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2+2x) \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+2x}{2x^2+3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)}$$

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)} \qquad \lim_{x\to-\infty} \ln(|x+\pi|)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty} (\ln(x+1) - \ln x)$$

Toutes les limites demandées ont un sens et on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} = \infty \quad \text{et même} \quad +\infty \quad \text{en} \quad 1^+ \quad \text{et} \quad -\infty \quad \text{en} \quad 1^-$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|1-x|}{x^2-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^- \qquad \lim_{x\to-\infty}(-x^2+2x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+2x}{2x^2+3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = (-1)^- \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^+ \qquad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(2x)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(|x+\pi|) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{x^2+1}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^- \qquad \lim_{x\to+\infty} (\ln(x+1) - \ln x) = 0^+.$$

I. Continuité et dérivation

1. **a) On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.**

$$\sqrt[3]{3x^4+1} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad \frac{1}{x^2+2x+1} \qquad \operatorname{arctg}(\sin x) \qquad \sqrt{\cos 2x} \qquad \sin(\operatorname{tg} x)$$

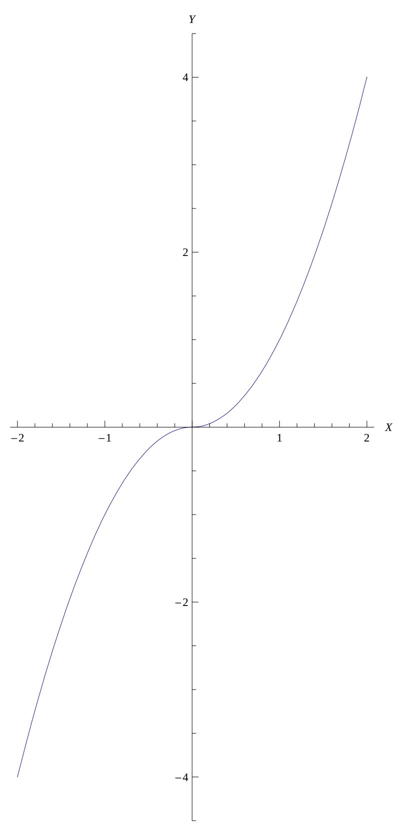
$$e^{\arcsin x} \qquad e^{e^x} \qquad \ln(x^2) \qquad \ln(x^2-x-2) \qquad (\ln(3))^x \qquad x|x|$$

b) Représenter la fonction $x \mapsto x|x|$ dans un repère orthonormé.

a)

Fonction	$\mathrm{dom}(f) =$ dom de continuité	dom de dérivabilité	Dérivée
$f(x) = \sqrt[3]{3x^4+1}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{4x^3}{\sqrt[3]{(3x^4+1)^2}}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$	$]-1,+\infty[$	$]-1,+\infty[$	$\dfrac{-1}{2\sqrt{(1+x)^3}}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{-2}{(x+1)^3}$
$f(x) = \mathrm{arctg}(\sin x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$
$f(x) = \sqrt{\cos(2x)}$	$\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right]$	$\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right[$	$\dfrac{-\sin(2x)}{\sqrt{\cos(2x)}}$
$f(x) = \sin(\mathrm{tg}x)$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\dfrac{\cos(\mathrm{tg}x)}{\cos^2 x}$
$f(x) = e^{\arcsin x}$	$[-1,1]$	$]-1,1[$	$\dfrac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = e^{e^x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$e^{e^x}\,.\,e^x$
$f(x) = \ln(x^2)$	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$\dfrac{2}{x}$
$f(x) = \ln(x^2-x-2)$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]2,+\infty[$	$\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}$
$f(x) = (\ln 3)^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(\ln 3)^x\,.\,\ln(\ln 3)$
$f(x) = x\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$2\lvert x\rvert$

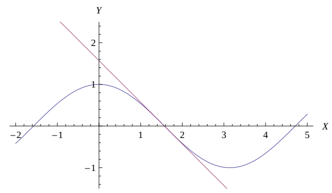
b)



II. Divers

1. **Déterminer l'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos x$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Représenter cette fonction et cette tangente.**

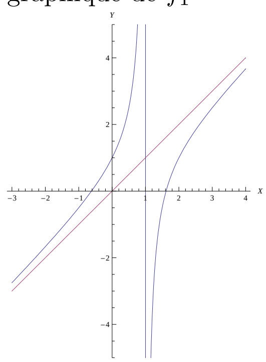
   L'équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \cos x$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est $y = \frac{\pi}{2} - x$.



2. **Représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2 suivantes**

$$f_1(x) = \frac{x - x^2 + 1}{1 - x}, \quad f_2(x) = xe^{-x}.$$

graphique de f_1



graphique de f_2