1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique
Liste type numéro 8
Répétition 8 : solutions

Version 5 novembre 2010 (V1 26/10/09)

I. Limites et dérivées (suite)

1. **Calculer les limites suivantes (dans chaque cas, si ce n'est pas possible ou si elle n'existe pas, en donner la raison)**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{x+1} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{\operatorname{arctg}(3x^2+2)} \qquad \lim_{x\to -\infty} \exp\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to -\infty} \big(\ln(|x-1|)-\ln x^2\big) \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(1-x)}{|x-1|}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(-x^2+3x+4)}{x-4} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln|-x^2+3x+4|}{x-4} \qquad \lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3} \qquad \lim_{u\to +\infty} u\, e^{\frac{1}{u-1}} \qquad \lim_{t\to 1^-} (t-1)\ln(1-t^2)$$

$$\lim_{y\to +\infty} \log_y 2 \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\exp(2x)}{\exp(x)} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{\exp(x^2)}}{\exp(x)}$$

Fonction	dom(f)	Limite
$f(x)=\frac{\sin(2x)}{x+1}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{x+1}=0$
$f(x)=\frac{x^2+1}{\operatorname{arctg}(3x^2+2)}$	$\mathbb{R}$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{\operatorname{arctg}(3x^2+2)}=+\infty$
$f(x)=\exp\left(-\frac{1}{x+1}\right)$	$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\lim_{x\to -\infty} \exp\left(-\frac{1}{x+1}\right)=1^+$
$f(x)=\sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x}$	$]0,+\infty[$	$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln\sqrt[3]{x}=0$
$f(x)=\frac{\ln(1/\|x\|)}{\sqrt{x^2}}$	$\mathbb{R}_0$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1/\|x\|)}{\sqrt{x^2}}=0$
$f(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=0^+$
$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$	$]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$	$\lim_{x\to -\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$
$f(x)=\big(\ln(\|x-1\|)-\ln x^2\big)$	$\mathbb{R}_0\setminus\{1\}$	$\lim_{x\to -\infty} \big(\ln(\|x-1\|)-\ln x^2\big)=-\infty$
$f(x)=\frac{\ln(1-x)}{\|x-1\|}$	$]-\infty,1[$	$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(1-x)}{\|x-1\|}$ pas de sens
$f(x)=\frac{\ln(-x^2+3x+4)}{x-4}$	$]-1,4[$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(-x^2+3x+4)}{x-4}$ pas de sens
$f(x)=\frac{\ln\|-x^2+3x+4\|}{x-4}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 4\}$	$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\|-x^2+3x+4\|}{x-4}=0$
$f(x)=\frac{1-\sin x}{\cos x}$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\lim_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos x}=0$
$f(x)=\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$	$\mathbb{R}_0\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$
$f(u)=u\, e^{\frac{1}{u-1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$	$\lim_{u\to +\infty} u\, e^{\frac{1}{u-1}}=+\infty$
$f(t)=(t-1)\ln(1-t^2)$	$]-1,1[$	$\lim_{t\to 1^-} (t-1)\ln(1-t^2)=0$

Fonction	dom(f)	Limite
$f(y) = \log_y 2$	$]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[$	$\lim\limits_{y\to+\infty} \log_y 2 = 0^+$
$f(x) = \dfrac{\exp(2x)}{\exp(x)}$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\exp(2x)}{\exp(x)} = 0^+$
$f(x) = \dfrac{\sqrt{\exp(x^2)}}{\exp(x)}$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{\exp(x^2)}}{\exp(x)} = +\infty$

La limite $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(1-x)}{|x-1|}$ n'a pas de sens car on peut trouver un intervalle ouvert comprenant 1 dont l'intersection avec dom$(f)\cap\,]1,+\infty[$ est vide.
La limite $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(-x^2+3x+4)}{x-4}$ n'a pas de sens car le domaine de définition de f est minoré.

2. **Une lentille convexe est caractérisée par une distance focale f. Si un objet se trouve à une distance p de la lentille, son image sera à une distance q liée à p par la relation $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, quelle est la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33cm ?**

   Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33cm est égale à $\dfrac{-1}{100}$. La distance q de l'image décroît donc à la vitesse de $\dfrac{1}{100}$ cm pour une variation de 1 cm de p.