1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique
Liste type numéro 12
Divers : solutions

Version 10 décembre 2010 (V1 06/12/09)

Exercices à résoudre

1. **(a) Résoudre les équations et inéquation suivantes (pour (ii), (iii) , on suppose que $x \in [0, 2\pi]$)**

$$(i)\ x|x^2-1| \leq |x-1|, \qquad (ii)\ \sin x\ \ \cos x = 1, \qquad (iii)\ 4\sin x\ \ \cos x = 1.$$

L'inéquation (i) a pour ensemble de solutions

$$S = \left]-\infty, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup \{1\},$$

l'équation (ii) est impossible et les solutions dans $[0, 2\pi]$ de l'équation (iii) sont $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{13\pi}{12}$ et $\frac{17\pi}{12}$.

(b) Simplifier au maximum l'expression suivante : $\sin\left(\ln e^{\pi/3}\right) + \cos\left(\mathrm{tg}\ (5\pi/4)\right)$

L'expression vaut $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(1)$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|1-x|}.$$

Les deux limites existent et valent chacune 1.

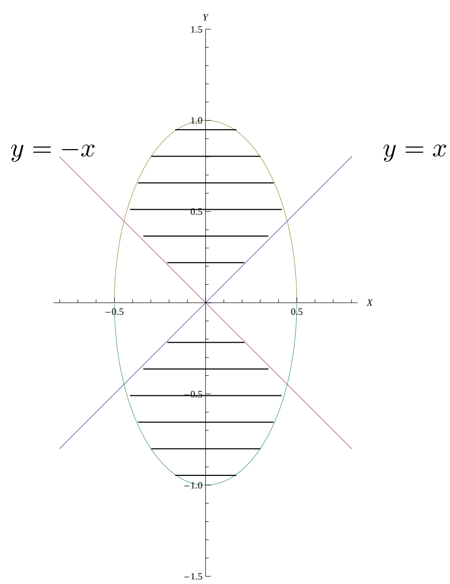
3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\ \ \cos^2 x\ \ dx, \qquad \int_0^{+\infty} x e^{-x/2}\ \ dx.$$

Ces 2 intégrales existent. La première vaut $\frac{1}{3}$ et la seconde 4.

4. **Représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ \ :\ \ x^2 \leq y^2 \leq 1 - 4x^2\right\}$$



L'ensemble donné est l'ensemble des points hachurés ; les points des bords sont compris dans l'ensemble.

5. **(i) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ vérifie l'équation différentielle**

$$e^x Df(x) - f(x) = 0.$$

En remplaçant $f(x)$ et $Df(x)$ respectivement par $e^{-e^{-x}}$ et $e^{-e^{-x}}\ e^{-x}$, on voit que l'équation est vérifiée.

(ii) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$9D^2 f(x) + 6Df(x) + f(x) = 1 + e^{-x/3}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donné par

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{18} + C_1 x + C_2\right) e^{-\frac{x}{3}} + 1,\ x \in \mathbb{R}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Les courbes de croissance de population du modèle de Gompertz sont les représentations de fonctions exponentielles du type**

$$f(t) = e^{be^{ct}},\ t \in \mathbb{R}$$

où b, c sont des paramètres réels strictement négatifs.

– **Déterminer la dérivée seconde de f.**
La dérivée seconde de f vaut

$$D^2 f(t) = bc^2 e^{ct} e^{be^{ct}} (be^{ct} + 1),\ t \in \mathbb{R}$$

– **Quelle(s) valeur(s) doit-on donner à b pour que la dérivée seconde de f s'annule en $t = 0$?**
On doit donner la valeur -1 à b pour que la dérivée seconde de f s'annule en $t = 0$.

– **Pour $b = c = -2$, déterminer la limite des valeurs de f aux extrémités de son domaine de définition.**
La limite en $-\infty$ vaut 0^+ et celle en $+\infty$ vaut 1^-.

7. **Soit t un nombre réel.**

– **Déterminer les parties réelle et imaginaire du complexe**

$$e^{(i + 1/2)\,t}$$

La partie réelle est $e^{\frac{t}{2}} \cos(t)$ et la partie imaginaire $e^{\frac{t}{2}} \sin(t)$.

– **Ecrire la somme suivante sous la forme du sinus d'un réel**

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(3t) + \frac{1}{2} \sin(3t)$$

La somme s'écrit sous la forme $\sin(\frac{\pi}{3} + 3t)$.

8. **Déterminer la valeur du terme indépendant de x, réel non nul, dans l'expression suivante**

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{2011}$$

Le terme indépendant de x dans l'expression vaut zéro.

Problème élémentaire

Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 comme cote finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?

L'étudiant a fourni 63 réponses correctes.

QCM

1. **La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x|x| - 1$ est**
   1) **paire**
   2) **impaire**
   3) $\boxed{\textbf{croisssante}}$
   4) **décroissante**
   5) **aucune des réponses précédentes n'est correcte**
2. **Si on double la longueur de l'arête d'un cube, l'aire totale des faces de ce cube est**
   1) **multipliée par** 2
   2) $\boxed{\textbf{multipliée par } 4}$
   3) **multipliée par** 6
   4) **multipliée par** 8
   5) **aucune des réponses précédentes n'est correcte**