1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Mathématiques générales 2010-2011 : Problèmes semaine 12

1. **Françoise a trois fois l'âge que Nicolas avait quand elle avait l'âge actuel de Nicolas. Quand Nicolas aura l'âge de Françoise, ils auront ensemble 112 ans. Quels sont les âges actuels de Nicolas et de Françoise ?**

   Solution. Soit x l'âge actuel de Nicolas et $x+y$ celui de Françoise, les âges étant donnés en années.
   Quand Françoise avait x années, Nicolas en avait $x-y$ et quand Nicolas aura $x+y$ années, Françoise en aura $x+2y$. Dès lors, on a le système d'équations

   $$\left\{\begin{array}{l} x+y=3(x-y) \\ x+y+x+2y=112 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x=4y \\ 7y=112 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=32 \\ y=16 \end{array}\right. .$$

   Ainsi, Nicolas a 32 ans et Françoise en a 32+16=48 ans.

2. **Si on compte les arbres d'un jardin par groupes de 8, il en reste 5 et si on les compte par groupes de 7, il en reste 2. Sachant que le nombre de groupes de 7 surpasse de 3 celui des groupes de 8, combien d'arbres y a-t-il dans ce jardin ?**

   Solution. Soit x le nombre de groupes de 8 arbres et $x+3$ celui de groupes de 7 arbres du jardin. Le nombre d'arbres du jardin vaut donc

   $$8x+5=7(x+3)+2 \Leftrightarrow x=21+2-5 \Leftrightarrow x=18.$$

   Ainsi, le nombre d'arbres du jardin est égal à $18 \,.\, 8+5=149$ arbres.

Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Mathématiques générales 2010-2011 : Problèmes semaine 13

1. **Rédiger une démonstration de la propriété suivante, suggérée au cours : *Soit un naturel strictement positif m. La fonction polynomiale $x \mapsto x^m$ est dérivable en tout réel x et sa dérivée a la forme explicite $mx^{m-1},\ x \in \mathbb{R}$.***

   Solution. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}_0$. En appliquant la définition de la dérivabilité, montrons que la limite
   $$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h}$$
   existe, est finie et vaut mx^{m-1}.

   Vu la formule du binôme de Newton, on a
   $$(x+h)^m - x^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j h^j x^{m-j} - x^m = \sum_{j=1}^{m} C_m^j h^j x^{m-j} + C_m^0 x^m - x^m = \sum_{j=1}^{m} C_m^j h^{j-1}\ h\, x^{m-j}.$$
   Dès lors,
   $$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\sum_{j=1}^{m} C_m^j h^{j-1} x^{m-j} \right) = C_m^1 x^{m-1} = mx^{m-1}.$$
   Ainsi, la fonction $x \mapsto x^m$ est dérivable en tout réel x et sa dérivée a la forme explicite $mx^{m-1},\ x \in \mathbb{R}$.

2. **Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 1.28 mètres cube de glace ?**

   Solution. Quand l'eau se transforme en glace, le volume de la glace vaut $\dfrac{16}{15}$ du volume de l'eau et donc le volume de l'eau vaut $\dfrac{15}{16}$ de celui de la glace. Comme 1.28 m^3 correspondent à 1280 litres, le nombre de litres d'eau à transformer en glace vaut $1280 \cdot \frac{15}{16} = 1200$ litres. Ainsi, pour obtenir 1.28 mètres cube de glace, on a besoin de 1200 litres d'eau.