1, 2, 3...Sciences

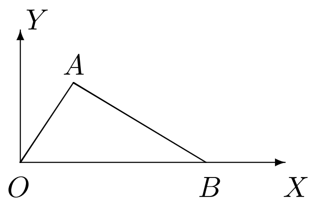
Année académique 2010-2011

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES 2010-2011 : PROBLÈMES SEMAINE 4

---

1. **Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?**

   Solution.

   Si θ est la mesure de l'angle $\widehat{BOA}$, les coordonnées polaires de A sont $(1, \theta)$; les coordonnées cartésiennes de ce point sont alors $(\cos\theta, \sin\theta)$.

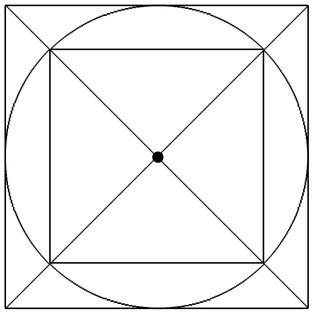
   Dans le triangle OAB rectangle en A, on a $\mathrm{tg}\theta = \frac{|AB|}{|0A|} = 2$. Comme $\mathrm{tg}^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$, on a $\cos^2\theta = \frac{1}{5}$ et $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{4}{5}$.

   Dès lors, comme on travaille dans le premier quadrant, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des réels positifs et les coordonnées cartésiennes de A sont $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

2. **Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.**

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?

Solution.



Si c est la longueur d'un côté du carré inscrit (jardin) alors l'aire du jardin vaut c^2.
Un diamètre du cercle a même longueur qu'une diagonale du carré inscrit mais aussi qu'un côté du carré circonscrit.
Par application du théorème de Phythagore dans un des triangles rectangles formés par une diagonale et deux côtés consécutifs du carré inscrit, on a $D^2 = 2c^2$ si D est la longueur d'un diamètre du cercle.
Dès lors, l'aire du carré circonscrit vaut $D^2 = 2c^2$ et l'aire de la promenade, différence entre l'aire du carré circonscrit et celle du carré inscrit vaut $2c^2 - c^2 = c^2$.
Ainsi, l'aire du jardin est égale à l'aire de la promenade.