1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

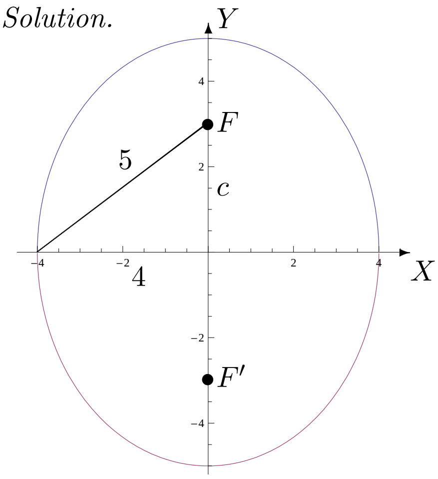
Mathématiques générales 2010-2011 : Problèmes semaine 6

1. **Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse $\mathcal{E}$ par son équation cartésienne**

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.

Solution.



Si les foyers ont pour coordonnées cartésiennes $(0, c)$ et $(0, -c)$ alors on a

$$c^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow c = 3$$

car c positif.

2. **Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont des nombres réels tels que $0 < b < a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées$(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.

Solution. Soit P un point de l'ellipse de coordonnées cartésiennes (x, y). L'ordonnée de ce point est telle que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Le carré de la distance de P à F vaut

$$\operatorname{dist}^2(P, F) = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (x-c)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

puisque $b^2 = a^2 - c^2$ ou encore

$$\operatorname{dist}^2(P, F) = \frac{a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^4 - a^2x^2 - a^2c^2 + c^2x^2}{a^2} = \left(\frac{cx - a^2}{a}\right)^2$$

b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c.

Solution. La distance entre P et F est donc donnée par $\dfrac{|cx - a^2|}{a}$ et comme $x \in [-a, a]$ et $c < a$, la valeur maximale est obtenue pour $x = -a$ et la valeur minimale pour $x = a$. Ainsi, la valeur maximale est $a + c$ et la valeur minimale $a - c$.

c) On appelle « aphélie » le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et « périhélie » le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p. Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p.

Solution. En résolvant le système $\left\{\begin{array}{l} r_a = a + c \\ r_p = a - c \end{array}\right.$, on a $\left\{\begin{array}{l} a = \frac{r_a + r_p}{2} \\ c = \frac{r_a - r_p}{2} \end{array}\right.$.

Dès lors, l'excentricité vaut

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}.$$

d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une valeur approximative de e.

Solution. Comme $r_a = 152\ 097\ 701$ km et $r_p = 147\ 098\ 074$ km, on a $e = 0{,}01671022$.