



# 1, 2, 3... Sciences

Année académique 2010-2011

---

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES 2010-2011 : PROBLÈME SEMAINE 8

---

1. On se rapporte à un repère orthonormé d'origine notée  $O$ , le sol étant symbolisé par l'axe  $X$  et la verticale par  $Y$ . Dans ce repère, le mouvement d'un projectile lancé de l'origine avec une vitesse initiale de composantes  $(v_1, v_2)$  est donnée en fonction du temps par

$$\begin{cases} x(t) = v_1 t \\ y(t) = v_2 t - \frac{g}{2} t^2 \end{cases}$$

où  $g$  désigne l'accélération due à la gravité terrestre.

- a) Montrer que la trajectoire du projectile est une parabole.

*Solution.* En éliminant  $t$  entre les deux équations, si  $v_1 \neq 0$ , on obtient

$$y = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2 \quad (1)$$

qui est bien l'équation d'une parabole.

- b) Si la norme de la vitesse initiale vaut  $20 \text{ m/s}$  et si l'angle de tir vaut  $60^\circ$ , quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile<sup>1</sup>? Pourquoi?

*Solution.* Les composantes de la vitesse initiale sont  $(v_1, v_2) = (20 \cos 60^\circ, 20 \sin 60^\circ) = (10, 10\sqrt{3})$ . Si  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , on a  $y(t) = 10\sqrt{3}t - 5t^2$ , fonction du second degré ayant un maximum pour  $t = \sqrt{3}$ . La hauteur maximale atteinte par le projectile vaut alors  $y(\sqrt{3}) = 30 - 15 = 15 \text{ m}$ .

- c) Quelle est l'expression de la distance horizontale parcourue<sup>2</sup> par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol? Pourquoi?

*Solution.* Les zéros de la fonction  $t \mapsto y(t) = 10\sqrt{3}t - 5t^2$  sont 0 et  $2\sqrt{3}$ . Ainsi, lorsque le projectile retombe sur le sol, la distance horizontale parcourue vaut

$$x(2\sqrt{3}) = 10 \cdot 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \text{ m}.$$

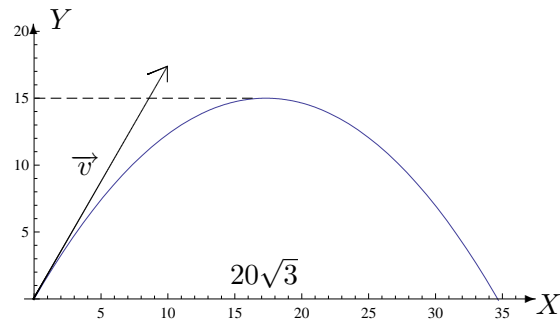
---

<sup>1</sup>(On suppose  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .)

<sup>2</sup>la portée

d) Représenter graphiquement les divers éléments de ce problème.

*Solution.* En remplaçant  $v_1$ ,  $v_2$  et  $g$  par leur valeur dans (1), on a  $y = \sqrt{3}x - \frac{1}{20}x^2$ , équation d'une parabole dont voici la représentation graphique dans un repère orthonormé.



e) Quel angle de tir doit-on prendre pour que la distance dont il est question au point c) soit maximale (en prenant une norme de la vitesse fixe) ?

*Solution.* Les zéros de  $y(t) = v_2 t - \frac{g}{2} t^2$  sont 0 et  $\frac{2v_2}{g}$ . Ainsi, lorsque le projectile retombe sur le sol, la distance horizontale parcourue vaut

$$x\left(\frac{2v_2}{g}\right) = \frac{2v_1 v_2}{g} = \frac{2v^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g} = \frac{v^2 \sin(2\theta)}{g}$$

si  $\theta$  est l'angle de tir et  $v$  la norme de la vitesse. Cette distance est maximale si et seulement si  $\sin(2\theta) = 1 \Leftrightarrow \theta = 45^\circ$  puisque  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ .