# *1, 2, 3. . .Sciences*

## *Année académique 2010-2011*

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES 2010-2011 : TEST 1 (15/10/2010)

1. **Résoudre l'inéquation suivante ($x$ est l'inconnue réelle)**

$$|x-1| < \frac{1}{x+1}$$

*Solution.* L'inéquation est définie pour tout réel différent de $-1$.

**Première méthode de résolution** (générale mais longue)
L'inéquation est équivalente à

$$\frac{1}{x+1} - |x-1| > 0 \Leftrightarrow \frac{1-|x-1|(x+1)}{x+1} > 0.$$

• Si $x \leq 1$ ($x \neq -1$) l'inéquation est équivalente à

$$\frac{1-(1-x)(x+1)}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0 \text{ avec } x \neq 0$$

et son ensemble de solutions est $S_1 = ]-1, 0[ \cup ]0, 1]$.
• Si $x \geq 1$ l'inéquation est équivalente à

$$\frac{1-(x-1)(x+1)}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-x^2}{x+1} > 0.$$

Etudions le signe du premier membre. On a

| $x$ | | $-\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-x^2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x+1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{2-x^2}{x+1}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ | $0$ | $-$ |

Dans ce cas, l'ensemble de solutions est $S_2 = [1, \sqrt{2}[$ et l'ensemble de solutions de l'inéquation donnée est $S = S_1 \cup S_2 = ]-1, 0[ \cup ]0, \sqrt{2}[$.

**Deuxième méthode de résolution** (plus rapide)
Le premier membre étant positif, le second l'est aussi. Dès lors, d'une part, les solutions ne peuvent appartenir qu'à l'ensemble $]-1,+\infty[$ et, d'autre part, si on travaille dans cet ensemble, on peut multiplier les deux membres de l'inéquation par le facteur positif $x+1$ en conservant le sens de l'inégalité. On obtient alors l'inéquation équivalente $(x+1)|x-1|-1<0$.

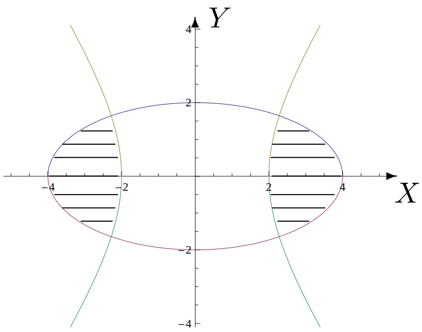
• Si $x \in ]-1,1]$, l'inéquation s'écrit $(x+1)(1-x)-1<0 \Leftrightarrow -x^2<0$ et a pour ensemble de solutions $S_1 = ]-1,0[ \cup ]0,1]$.
• Si $x \in [1,+\infty[$, l'inéquation s'écrit $(x+1)(x-1)-1<0 \Leftrightarrow x^2-2<0$ et a pour ensemble de solutions $S_2 = [1,\sqrt{2}[$.

Dès lors, l'ensemble des solutions est $S = S_1 \cup S_2 = ]-1,0[ \cup ]0,\sqrt{2}[$.

2. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$A = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2+4y^2 \leq 16 \textbf{ et } 9x^2-4y^2 \geq 36\ \}.$$

*Solution.* L'ensemble $A$ est l'ensemble hachuré ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.




3. **Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points $A$ et $B$ de coordonnées cartésiennes respectives $(-2,2,3)$ et $(-1,0,2)$ et le vecteur $\overrightarrow{v}$ de composantes $(2,-2,4)$. Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{v}$ ainsi que le produit vectoriel de $\overrightarrow{BA}$ par $\overrightarrow{v}$ dans cet ordre.**

*Solution.* Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(1,-2,-1)$. Dès lors, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{v}$ vaut $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{v} = 2+4-4 = 2$ et le produit vectoriel de $\overrightarrow{BA}$ par $\overrightarrow{v}$ a pour composantes $(10,6,-2)$.

1. **Résoudre l'inéquation suivante ($x$ est l'inconnue réelle)**

$$x+2>\frac{1}{|x-2|}$$

*Solution.* L'inéquation est définie pour tout réel différent de 2.

**Première méthode de résolution** (générale mais longue)
L'inéquation est équivalente à

$$x+2-\frac{1}{|x-2|}>0\Leftrightarrow\frac{|x-2|(x+2)-1}{|x-2|}>0.$$

• Si $x<2$ l'inéquation est équivalente à

$$\frac{(2-x)(x+2)-1}{2-x}>0\Leftrightarrow\frac{3-x^2}{2-x}>0.$$

Etudions le signe du premier membre. On a

| $x$ | | $-\sqrt{3}$ | | $\sqrt{3}$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3-x^2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $2-x$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $\frac{3-x^2}{2-x}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ |

Dès lors l'ensemble de solutions est $S_1=\,]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$.
• Si $x>2$ l'inéquation est équivalente à

$$\frac{(x-2)(x+2)-1}{x-2}>0\Leftrightarrow\frac{x^2-5}{x-2}>0.$$

Etudions le signe du premier membre. On a

| $x$ | | $-\sqrt{5}$ | | $2$ | | $\sqrt{5}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-5$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $\frac{x^2-5}{x-2}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\nexists$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Dès lors l'ensemble de solutions est $S_2=\,]\sqrt{5},+\infty[$ et l'ensemble de solutions de l'inéquation donnée est $S=S_1\cup S_2=\,]-\sqrt{3},\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{5},+\infty[$.

**Deuxième méthode de résolution** (plus rapide)
Le second membre étant positif, le premier l'est aussi. Dès lors, d'une part, les solutions ne peuvent appartenir qu'à l'ensemble $]-2,+\infty[$ et, d'autre part, on peut multiplier les deux membres de l'inéquation par le facteur positif $|x-2|$ en conservant le sens de l'inégalité. On obtient alors l'inéquation équivalente $(x+2)|x-2|-1>0$.

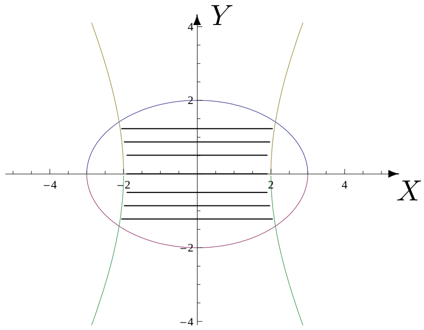
• Si $x\in\,]-2,2[$, l'inéquation s'écrit $(x+2)(2-x)-1>0\Leftrightarrow 3-x^2>0$ et a pour ensemble de solutions $S_1=\,]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$.
• Si $x\in\,]2,+\infty[$, l'inéquation s'écrit $(x+2)(x-2)-1>0\Leftrightarrow x^2-5>0$ et a pour ensemble de solutions $S_2=\,]\sqrt{5},+\infty[$.

Dès lors, l'ensemble des solutions est $S=S_1\cup S_2=\,]-\sqrt{3},\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{5},+\infty[$.

2. **Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble**

$$A = \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + 9y^2 \leq 36 \ \textbf{et} \ 4x^2 - y^2 \leq 16 \ \}.$$

*Solution.* L'ensemble $A$ est l'ensemble hachuré ; les points des "bords" sont compris dans l'ensemble.




3. **Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les points** $A$ **et** $B$ **de coordonnées cartésiennes respectives** $(3,-2,1)$ **et** $(-1,2,4)$ **et le vecteur** $\overrightarrow{v}$ **de composantes** $(-1,3,1)$**. Calculer le produit scalaire de** $\overrightarrow{AB}$ **par** $\overrightarrow{v}$ **ainsi que le produit vectoriel de** $\overrightarrow{BA}$ **par** $\overrightarrow{v}$ **dans cet ordre.**

*Solution.* Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(-4,4,3)$. Dès lors, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{v}$ vaut $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{v} = 4 + 12 + 3 = 19$ et le produit vectoriel de $\overrightarrow{BA}$ par $\overrightarrow{v}$ a pour composantes $(5,-1,8)$.