Université de Liège

1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2010-2011

Mathématiques générales 2010-2011 : Test 2 (22/11/2010)

Calculer (si possible) les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcos}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right), \qquad \lim_{x\to 3} \frac{\sin(6-2x)}{x^2-9}$$

Solution. La fonction $x \mapsto \operatorname{arcos}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right)$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : 2x^2+1 \neq 0,\ -1 \leq \frac{1}{2x^2+1} \leq 1\} = \mathbb{R}$$

puisque $2x^2+1 > 0$ et $2x^2+1 \geq 1$ pour tout réel x.

Le domaine de définition n'étant pas majoré, le calcul de la limite peut être envisagé. En appliquant le théorème des limites des fonctions composées, on a

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2+1) = +\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{y} = 0^+ \\ \lim\limits_{z\to 0^+} \operatorname{arcos}(z) = \dfrac{\pi}{2}^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcos}\left(\frac{1}{2x^2+1}\right) = \frac{\pi}{2}^-.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(6-2x)}{x^2-9}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : x^2-9 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3,\ 3\}$.
Tout intervalle ouvert comprenant 3 rencontre le domaine de définition de la fonction. Le calcul de la limite peut donc être envisagé.

Soit $V =]3-\varepsilon, 3+\varepsilon[\setminus\{3\}$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Considérons les fonctions $f : x \mapsto \sin(6-2x)$ et $g : x \mapsto x^2-9$.
Ces fonctions sont dérivables dans $\mathbb{R}$ donc dans V, $Dg(x) = 2x \neq 0$ pour tout $x \in V$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} g(x) = 0$.
Comme $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-2\cos(6-2x)}{2x} = -\dfrac{1}{3}$, par application du théorème de l'Hospital, on a

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(6-2x)}{x^2-9} = -\frac{1}{3}.$$

Calculer (si possible) les limites suivantes

$$\lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{-x^2}{x^2+1}\right), \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^2-1}$$

Solution. La fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{-x^2}{x^2+1}\right)$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2+1 \neq 0,\ -1 \leq \frac{-x^2}{x^2+1} \leq 1\} = \mathbb{R}$$

puisque $x^2+1>0,\ -x^2 \leq 0$ et $\frac{x^2}{x^2+1} \leq 1$ pour tout réel x.

Le domaine de définition n'étant pas minoré, le calcul de la limite peut être envisagé. En appliquant le théorème des limites des fonctions composées, on a

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = (-1)^+ \\ \displaystyle\lim_{y\to(-1)^+} \arcsin(y) = -\frac{\pi}{2}^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \arcsin\left(\frac{-x^2}{x^2+1}\right) = -\frac{\pi}{2}^+.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^2-1}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : x>0,\ x^2-1 \neq 0\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
Tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre le domaine de définition de la fonction. Le calcul de la limite peut donc être envisagé.

Soit $V =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\setminus\{1\}$ avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Considérons les fonctions $f : x \mapsto \ln(\sqrt{x})$ et $g : x \mapsto x^2-1$.
La fonction f est dérivable dans $]0,+\infty[$ et g est dérivable dans $\mathbb{R}$; elles sont donc dérivables dans V, $Dg(x) = 2x \neq 0$ pour tout $x \in V$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} g(x) = 0$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}}{2x} = \lim_{x\to1} \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{4}$, par application du théorème de l'Hospital, on a

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^2-1} = \frac{1}{4}.$$