Université de Liège

# *1, 2, 3. . .Sciences*

## *Année académique 2010-2011*

Mathématiques générales 2010-2011 : Test 3 (7/12/2010)

**Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(6x)dx, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{4x}{(3x^2+2)^3}dx$$

*Solution.* La fonction $x \mapsto 2x\sin(6x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ ; elle est donc intégrable sur cet ensemble.
Par une intégration par parties, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin(6x)dx = \left[\frac{-2x\cos(6x)}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(6x)}{6}\, dx = -\frac{\pi}{6}\cos(3\pi) + \left[\frac{1}{3}\frac{\sin(6x)}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{4x}{(3x^2+2)^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 0]$, ensemble non borné. Etudions son intégrabilité en $-\infty$ en calculant la limite

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|4x|}{(3x^2+2)^3}\cdot|x|^5\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^6}{27x^6} = \frac{4}{27}.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 5 > 1$, par application du critère en $\theta$ on peut affirmer que la fonction est intégrable en $-\infty$ donc intégrable sur $]-\infty, 0]$ et on a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\frac{4x}{(3x^2+2)^3}dx &= \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{0} 6x\,\frac{1}{(3x^2+2)^3}dx = \frac{2}{3}\left[\frac{-1}{2(3x^2+2)^2}\right]_{-\infty}^{0}\\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(3x^2+2)^2}\right) = -\frac{1}{12}\end{aligned}$$

car $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(3x^2+2)^2} = 0.$

**Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

$$\int_{-1}^{0} (2x+1)e^{-3x}dx, \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{5x^2}{(2x^3+1)^2}dx$$

*Solution.* La fonction $x \mapsto (2x+1)e^{-3x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[-1,0]$ ; elle est donc intégrable sur cet ensemble.
Par une intégration par parties, on a

$$\int_{-1}^{0} (2x+1)e^{-3x}dx = \left[\frac{-(2x+1)e^{-3x}}{3}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} 2e^{-3x}\, dx = \frac{-1-e^3}{3} - \frac{2}{9}\left[e^{-3x}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{-1-e^3}{3} + \frac{-2+2e^3}{9} = \frac{-e^3-5}{9}.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{5x^2}{(2x^3+1)^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\}$ donc sur $[0,+\infty[$, ensemble non borné. Etudions son intégrabilité en $+\infty$ en calculant la limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{(2x^3+1)^2}\, .\, x^4\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^6}{4x^6} = \frac{5}{4}.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 4 > 1$, par application du critère en $\theta$ on peut affirmer que la fonction est intégrable en $+\infty$ donc intégrable sur $[0,+\infty[$ et on a

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{5x^2}{(2x^3+1)^2}dx = \frac{5}{6}\int_{0}^{+\infty} 6x^2\frac{1}{(2x^3+1)^2}dx = \frac{5}{6}\left[\frac{-1}{2x^3+1}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= -\frac{5}{6}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^3+1} - 1\right) = \frac{5}{6}$$

car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^3+1} = 0$.

**Calculer les intégrales suivantes (si c'est possible)**

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (4x-3)\cos(2x)\ dx, \qquad \int_{-\infty}^{0} \frac{3x^3}{(4x^4+3)^2}dx$$

*Solution.* La fonction $x \mapsto (4x-3)\cos(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur le fermé borné $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ ; elle est donc intégrable sur cet ensemble.
Par une intégration par parties, on a

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (4x-3)\cos(2x)\ dx = \left[\frac{(4x-3)\sin(2x)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} - 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \sin(2x)\ dx = -\frac{\pi+3}{2} + [\cos(2x)]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$= -\frac{\pi+3}{2} + 1 = -\frac{\pi+1}{2}.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{3x^3}{(4x^4+3)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $]-\infty, 0]$, ensemble non borné. Etudions son intégrabilité en $-\infty$ en calculant la limite

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{|3x^3|}{(4x^4+3)^2}\ .\ |x|^5\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^8}{16x^8} = \frac{3}{16}.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 5 > 1$, par application du critère en $\theta$ on peut affirmer que la fonction est intégrable en $-\infty$ donc intégrable sur $]-\infty, 0]$ et on a

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{3x^3}{(4x^4+3)^2}dx = \frac{3}{16}\int_{-\infty}^{0} 16x^3 \frac{1}{(4x^4+3)^2}dx = \frac{3}{16}\left[\frac{-1}{4x^4+3}\right]_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{3}{16}\left(-\frac{1}{3} - \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{4x^4+3}\right) = -\frac{1}{16}$$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{4x^4+3} = 0$.