Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Corrigé de l'examen de math du 10 janvier 2011

Version 12 janvier 2011

Mathématiques générales A
Examen du lundi 10/01/11, 08h30-11h30, Amphis divers

Théorie

Question 1.

- **Quelle est la définition de la fonction** arcos **?**
- **Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction** arcos **? Démontrer ce résultat.**

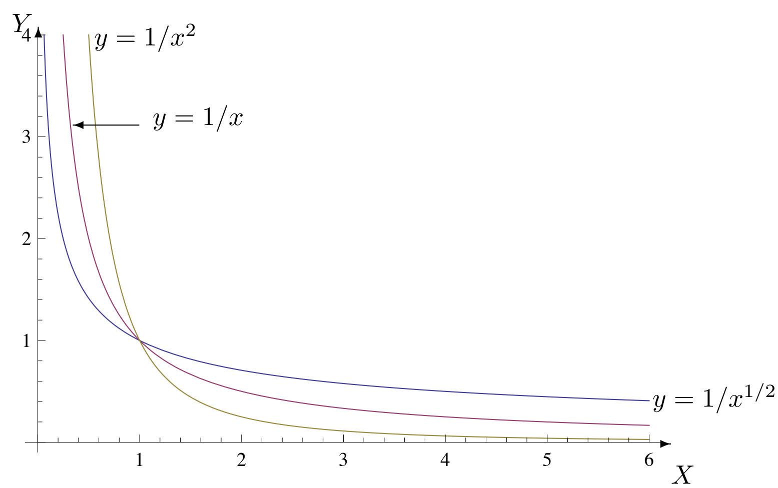
Solution. Voir cours et aussi la dernière page de ce document.

Question 2.

- **Quelle est la définition de l'intégrabilité d'une fonction continue sur** $[1, +\infty[$ **et à valeurs positives ?**
- **Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel** s **pour que la fonction** $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ **soit intégrable sur** $[1, +\infty[$ **? Démontrer ce résultat en vous servant de la définition de l'intégrabilité que vous donnez au point précédent.**

  Solution. Voir cours

- **Dans un même repère orthonormé du plan, représenter la fonction** $\frac{1}{x^s}$, $x > 0$ **pour** $s = 1/2, 1, 2$ **et interpréter l'intégrabilité sur** $[1, +\infty[$.



On peut interpréter l'intégrabilité de la façon suivante : pour $s = 1/2$ et $s = 1$, l'aire sous la courbe est infinie alors que pour $s = 2$, l'aire sous la courbe est finie.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle** x **appartient à l'intervalle** $[0, 2\pi]$**, résoudre l'équation suivante**

$$\sin(2x) = \sin x.$$

Solution. L'équation est équivalente à

$$(2x = x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = \pi - x + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})) \Leftrightarrow (x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})).$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $0, \ \frac{\pi}{3}, \ \pi, \ \frac{5\pi}{3}$ et 2π.

(b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$\ln\left(2e^2\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{(-3)^2}, \qquad |\cos 3 + i \sin 3|, \qquad e^{i\pi}$$

Solution. Comme $\sqrt{(-3)^2} = 3$, en appliquant la propriété relative au logarithme d'un produit de réels positifs et en utilisant $\ln e = 1$, on a

$$\ln\left(2e^2\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{(-3)^2} = \ln 2 + 2\ln e + \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 = \ln 2 + \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 5.$$

Le module du complexe $(\cos 3 + i\sin 3)$ vaut $\sqrt{\cos^2 3 + \sin^2 3} = 1$.
Comme $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$.

(c) Déterminer les parties réelle et imaginaire du complexe $\dfrac{1}{1+2i}$

Solution. Le complexe donné est égal à $\dfrac{1-2i}{5}$. Sa partie réelle est donc $\dfrac{1}{5}$ et sa partie imaginaire $\dfrac{-2}{5}$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{|2-3x|}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto x\ln x$ est définie sur $A =]0,+\infty[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $A \cap]0,+\infty[=]0,+\infty[$, le calcul de la limite en 0^+ peut être envisagé.
Pour lever l'indétermination $0\ .\ \infty$, on utilise le théorème de l'Hospital dont les hypothèses sont vérifiées, en considérant la fonction sous la forme $\dfrac{\ln x}{x^{-1}}$. En effet, si $V =]0,\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ assez petit), on a
1) $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto x^{-1}$ sont dérivables dans V
2) $Dg(x) = -x^{-2} \neq 0$ dans V
3) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \infty$
4) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$
Dès lors, la limite cherchée vaut 0.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+4x^2}}{|2-3x|}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Cela étant, on a

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{1+4x^2}}{|2-3x|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}}{2-3x} = -\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+4}}{\frac{2}{x}-3} = \frac{2}{3}.$$

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{\pi/6} \sin x \sin(2x)\ dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \sin x \sin(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc intégrable sur l'intervalle fermé borné $[0, \frac{\pi}{6}]$. Cela étant, comme $\sin x \sin(2x) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \cos(3x))$, on a

$$\int_0^{\pi/6} \sin x \sin(2x)\ dx = \frac{1}{2}\left[\sin(x) - \frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

On peut également remplacer $\sin(2x)$ par $2\sin(x)\cos(x)$ et calculer

$$\int_0^{\pi/6} 2\sin^2(x)\cos(x)\ dx = 2\left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\pi/6} = \frac{2}{3}\ .\ \frac{1}{8} = \frac{1}{12}.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{4+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t > 0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0,t]$ et on a

$$\int_0^t \frac{1}{4+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right).$$

Dès lors,

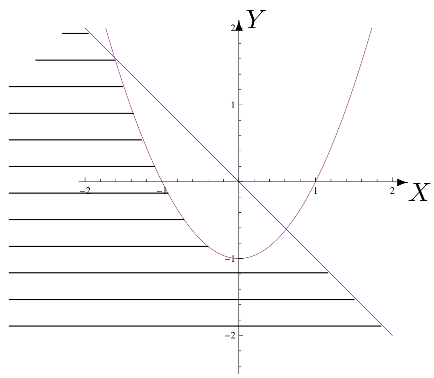
$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{4+x^2}\ dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{4+x^2}$ est à valeurs positives, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $[0, +\infty[$.

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y)\ :\ x,y\in\mathbb{R},\ x+y\leq 0 \text{ et } y+1-x^2\leq 0\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **(a) Montrer que la fonction** $x \mapsto e^{-2x}\ \cos x$ **vérifie l'équation différentielle**

$$D^2f + 4Df + 5f = 0.$$

Solution. D'une part, la fonction donnée est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$De^{-2x}\ \cos x = (-2\cos(x) - \sin(x))e^{-2x}$$

et

$$D^2(e^{-2x}\ \cos x) = (2\sin(x) - \cos(x) + 4\cos(x) + 2\sin(x))e^{-2x} = (4\sin(x) + 3\cos(x))e^{-2x} \text{ pour tout } x.$$

Dès lors,

$$D^2f(x) + 4Df(x) + 5f(x) = (4\sin(x) + 3\cos(x))e^{-2x} + 4(-2\cos(x) - \sin(x))e^{-2x} + 5e^{-2x}\ \cos x = 0$$

et la fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = x$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ et son seul zéro est -1. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$(c_1x + c_2)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 1 par une

exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax + B,\ x \in \mathbb{R}$ où A et B sont des constantes à déterminer. Comme $Df_P(x) = A$ et $D^2 f_P(x) = 0$, on a $2A + Ax + B = x$ et, par identification des coefficients des polynômes, on obtient $A = 1$ et $B = -2$.
Ainsi, $f_P(x) = x - 2,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$(c_1 x + c_2)e^{-x} + x - 2,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un chimiste a 10 ml d'une solution qui contient une concentration d'acide à* 25 %. *Combien de ml d'acide pur doit-il ajouter pour obtenir une concentration à* 40 % *?
Solution. La solution donnée contient $10\ .\ 0,25 = 2,5$ ml d'acide pur. Si on note x le nombre de ml d'acide pur à ajouter, on a l'équation

$$2,5 + x = 0,4(10 + x) \Leftrightarrow 2,5 + x = 4 + 0,4x \Leftrightarrow 0,6x = 1,5 \Leftrightarrow x = 2,5.$$

On doit donc ajouter 2,5 ml d'acide pur à la solution donnée pour obtenir une concentration à 40 %.

Exercices BIS

1. **Résoudre l'inéquation suivante (x est l'inconnue réelle)**

$$x\ |1 - x|\ \leq\ x^2$$

Solution. Tout réel négatif x est solution puisque le premier membre de l'inéquation est négatif tandis que le second est positif.
Considérons $x > 0$. L'inéquation est alors équivalente à $|1 - x| \leq x$.
Si $x \in]0, 1],\ |1 - x| = 1 - x$ et l'inéquation s'écrit $1 - x \leq x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.
Si $x \in [1, +\infty[,\ |1 - x| = x - 1$ et l'inéquation s'écrit $x - 1 \leq x$, inégalité vraie pour tout réel.
Dès lors, l'ensemble des solutions est $S =]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

2. **Si x désigne un réel de l'intervalle $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ et si $\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que valent les nombres**

$$\operatorname{tg} x,\ \sin x,\ \cos x?$$

Solution. Pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, on a $\operatorname{tg}(x) = 1/\operatorname{cotg}(x)$. Dès lors, $\operatorname{tg}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Comme $\operatorname{tg}^2(x) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, on obtient d'abord $\cos^2(x) = \frac{1}{3}$. Ensuite, comme $\cos(x) < 0$ puisque $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, on obtient $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Enfin, comme $\sin(x) = \operatorname{tg}(x)\cos(x)$, on a $\sin(x) = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Mathématiques générales A, 2010/2011
Examen de janvier 2011

Une correction « type » de la première question de théorie

(i)Quelle est la définition de la fonction* arcos *?
(ii)Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction* arcos *? Démontrer ce résultat.

<u>Réponse</u>

(i) La fonction *arcos* est définie comme étant la fonction inverse de la fonction cosinus, lorsqu'on a restreint le domaine de celle-ci (qui est $\mathbb{R}$) à l'intervalle $[0,\pi]$.
De cette manière, la fonction cosinus est en effet injective et son image est $[-1,1]$ (c'est la même image que lorsque le cosinus est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier) ; la fonction inverse de cos : $[0,\pi]\to[-1,1]$ est donc arcos : $[-1,1]\to[0,\pi]$ avec $\arccos x = y \Leftrightarrow x=\cos y$ où $x\in[-1,1],\ y\in[0,\pi]$.

(ii) Forme explicite de la dérivée :

$$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x\in]-1,1[.$$

Démonstration.
La démonstration de ce résultat repose
- sur l'application du théorème donnant la dérivabilité et l'expression de la dérivée de l'inverse d'une fonction bijective dérivable
- et sur la manipulation de propriétés trigonométriques de base.

Mettons cela « en route ».

Pour une fonction bijective dérivable $f\ :]a,b[\to]c,d[$ telle que $Df(x)\neq 0$ quel que soit $x\in]a,b[$, la théorie dit que l'inverse de f est dérivable sur $]c,d[$ et que sa dérivée est donnée par

$$D_x f^{-1}(x)=\frac{1}{D_X f(X)},\ X=f^{-1}(x),\ x\in]c,d[.$$

Dans le cas présent, on a $f=\cos$, $f^{-1}=\arccos$, $]a,b[=]0,\pi[$, $]c,d[=]-1,1[$ avec

$$D\cos x=-\sin x\neq 0,\quad \forall x\in]0,\pi[.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} D\arccos x &= \frac{1}{D_X\cos X},\ X=\arccos x,\ x\in]-1,1[\\ &= -\frac{1}{\sin(\arccos x)}\ x\in]-1,1[\end{aligned}$$

Cela étant, on a $\sin^2 y+\cos^2 y=1$ pour tout $y\in\mathbb{R}$, donc $\sin y=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}$ car $y=\arccos x$ est un réel appartenant à l'intervalle $]0,\pi[$ pour $x\in]-1,1[$ et $\sin y>0$ pour $y\in]0,\pi[$. On obtient donc

$$D\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}},\ x\in]-1,1[.$$

Pour conclure, il suffit maintenant de se rappeler la relation fondamentale qui lie une fonction et son inverse, à savoir ici $\cos(\arccos x)=x,\ x\in]-1,1[$ et on trouve finalement

$$D\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ x\in]-1,1[$$

ce qui est bien la forme explicite annoncée dans l'énoncé.

FB, 12 janvier 2011 (V1 : 22/01/09)