Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Corrigé de l'examen de math A du 16 août 2011

Version 18 août 2011

Mathématiques générales A, année académique 2010-2011
Examen du mardi 16/08/11, à partir de 8h30, Amphi 604

Théorie

Question 1.

- **Quelle est la définition de la fonction** arctg
- **Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction** arctg **? Démontrer ce résultat.**
- **Où la fonction** $x \mapsto \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}x)$ **est-elle définie ? (Donner le domaine de définition le plus grand possible)**

Solution. Voir cours.
La fonction $x \mapsto \mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Question 2.

- **Quelle est la définition de la continuité d'une fonction en un point de son domaine de définition ?**
- **Quelle est la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point d'un intervalle ouvert où elle est définie ? En donner une interprétation graphique.**
- **Quel(s) est (sont) le(s) lien(s) entre la notion de continuité et de dérivabilité en un point ? Enoncer et démontrer.**

Solution. Voir cours

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle** x **appartient à l'intervalle** $[\pi, 3\pi]$**, résoudre l'équation suivante**
$$\cos(2x) = 1 + \sin(2x).$$

   Solution. L'équation est équivalente à
$$1-2\sin^2(x) = 1+2\sin(x)\cos(x) \Leftrightarrow 2\sin(x)(\cos(x)+\sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \;\text{ ou }\; \cos(x) = -\sin(x)$$
$$\Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \;\text{ ou }\; \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Leftrightarrow x = k\pi \;\text{ ou }\; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$
   Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont $\pi,\ \dfrac{7\pi}{4},\ 2\pi,\ \dfrac{11\pi}{4}$ et 3π.

   (b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes
$$\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{5})\right) + \sqrt[3]{(-\pi)^3}, \qquad (1+i)^6$$

   Solution. Comme $\sqrt[3]{(-\pi)^3} = -\pi$ et $\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{5}) = -\mathrm{tg}(\frac{2\pi}{5}) = \mathrm{tg}(-\frac{2\pi}{5})$, puisque $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(x)) = x,\ \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a
$$\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}(\frac{3\pi}{5})\right) + \sqrt[3]{(-\pi)^3} = -\frac{2\pi}{5} - \pi = -\frac{7\pi}{5}.$$
   Comme $(1+i)^2 = 2i$, on a $(1+i)^6 = (2i)^3 = -8i$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**
$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{cotg}(x)}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$ est définie sur $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} > 0 \text{ et } |x| \neq 0\} = \mathbb{R}_0$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé.
Par application du théorème des limites des fonctions composées, comme

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{|x|} = 1^+ \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 1^+} \ln(y) = 0^+,$$

la limite demandée vaut 0^+.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{cotg}(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2},\ k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant $\frac{\pi}{2}$ rencontre A, le calcul de la limite en $\frac{\pi}{2}$ peut donc être envisagé.
Pour appliquer le théorème de l'Hospital, vérifions-en les hypothèses en considérant un voisinage $V = \left]\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right[$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit.
Les fonctions $g : x \mapsto \operatorname{cotg}(x)$ et $h : x \mapsto x - \frac{\pi}{2}$ sont dérivables dans V, la dérivée de h est non nulle dans V, les limites de g et h en $\frac{\pi}{2}$ valent 0 et

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{Dg(x)}{Dh(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1.$$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut -1.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+1}\ dx, \qquad \int_1^{3/2} x\cos(\pi x)\ dx.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+1} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $[0, +\infty[$, ensemble non borné fermé. Pour tout $t > 0$, cette fonction est donc intégrable sur $[0, t]$ et on a

$$\int_0^t \frac{1}{(x+1)^2}\ dx = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{t+1}.$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+1)^2}\ dx = \lim_{t\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) = 1.$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$ est à valeurs positives, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $[0, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x\cos(\pi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[1, 3/2]$, ensemble fermé borné. Dès lors la fonction est intégrable sur cet ensemble.

Par une intégration par parties, on a

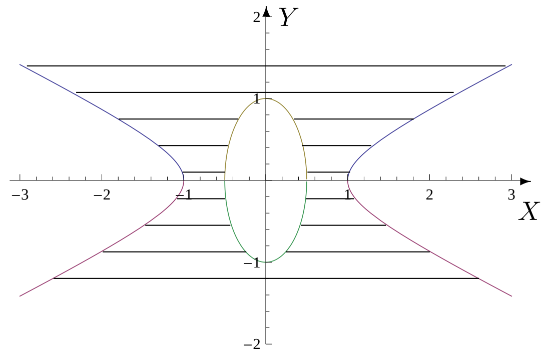
$$\int_1^{3/2} x\cos(\pi x)\ dx = \int_1^{3/2} x\ D\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right)\ dx = \left[\frac{x\sin(\pi x)}{\pi}\right]_1^{3/2} - \int_1^{3/2} \frac{\sin(\pi x)}{\pi}\ dx$$

$$= -\frac{3}{2\pi} + \left[\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\right]_1^{3/2} = -\frac{3}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2} = \frac{2-3\pi}{2\pi^2}.$$

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - 4y^2 \leq 1 \text{ et } 4x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **(a) On donne la fonction $g\ :\ x \mapsto \sqrt[3]{1-x^2}$. Où cette fonction est-elle définie et où cette fonction est-elle dérivable (ensembles les plus grands possibles) ?**
Solution. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,\ 1\}$.

(b) Sur le domaine de dérivabilité de g, que vaut l'expression suivante ?

$$3g^2(x)Dg(x) + 2x$$

Solution. Comme $Dg(x) = -\frac{2x}{3}(1-x^2)^{-2/3}$, l'expression vaut

$$3g^2(x)Dg(x) + 2x = -3(1-x^2)^{2/3}\frac{2x}{3}(1-x^2)^{-2/3} + 2x = -2x + 2x = 0.$$

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) + Df(x) - 6f(x) = e^{2x} + e^{-2x}.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x) + Df(x) - 6f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + z - 6 = (z+3)(z-2)$ et ses zéros sont -3 et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1e^{-3x} + c_2e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est la somme de deux fonctions exponentielles-polynômes.
D'une part, la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est le produit d'un polynôme de degré 0 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 2$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière pour ce terme est donc du type $f_1(x) = Axe^{2x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme $Df_1(x) = (2Ax + A)e^{2x}$ et $D^2f_1(x) = (4Ax + 4A)e^{2x}$, on a $(4Ax + 4A + 2Ax + A - 6Ax)e^{2x} = e^{2x} \Leftrightarrow 5A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{1}{5}$ et $f_1(x) = \frac{x}{5}e^{2x},\ x \in \mathbb{R}$.
D'autre part, la fonction $x \mapsto e^{-2x}$ est le produit d'un polynôme de degré 0 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = -2$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière pour ce terme est donc du type $f_2(x) = Ae^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer. Comme $Df_2(x) = -2Ae^{-2x}$ et $D^2f_2(x) = 4Ae^{-2x}$, on a $(4A - 2A - 6A)e^{-2x} = e^{-2x} \Leftrightarrow -4A = 1 \Leftrightarrow A = \frac{-1}{4}$ et $f_2(x) = \frac{-1}{4}e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$.

Dès lors, une solution particulière est donnée par $f_P(x) = \frac{x}{5}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1e^{-3x} + (c_2 + \frac{x}{5})e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x},\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un pharmacien a 0,02 dm^3 ***d'une solution qui contient une concentration de glucose à*** 25 %***. Combien de*** ml ***de glucose doit-il ajouter pour obtenir une concentration à*** 60 % ***?***
Solution. Comme 0,02 dm^3= 20 ml, la solution donnée contient $20\ .\ 0,25 = 5$ ml de glucose pur. Si on note x le nombre de ml de glucose pur à ajouter, on a l'équation

$$5 + x = 0,6(20 + x) \Leftrightarrow 5 + x = 12 + 0,6x \Leftrightarrow 0,4x = 7 \Leftrightarrow x = 17,5.$$

On doit donc ajouter 17,5 ml de glucose pur à la solution donnée pour obtenir une concentration à 60 %.