1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Corrigé de l'examen de math A du 23 mai 2011

Version 24 mai 2011

Mathématiques générales A
Examen du lundi 23/05/11, 08h30-10h30, Amphis divers

Théorie

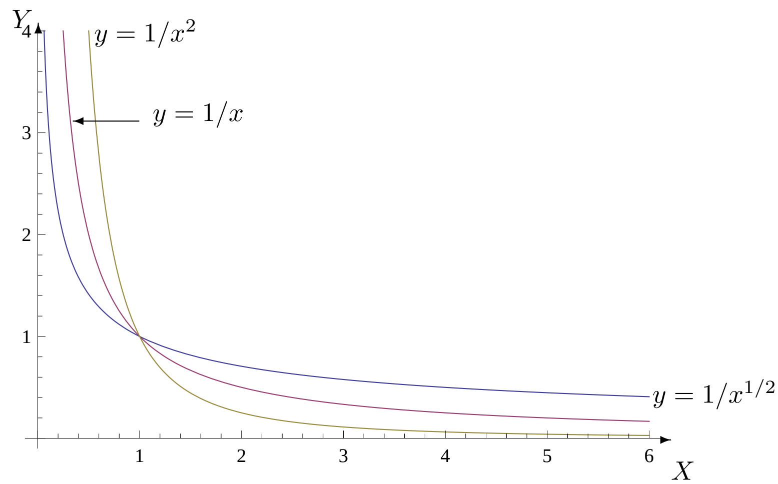
Question 1.
- **Quelle est la définition de la fonction** $\arcsin$ **?**
- **Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction** $\arcsin$ **? Démontrer ce résultat.**

Solution. Voir cours.

Question 2.
- **Soit** f **une fonction continue sur** $]0,1]$**. Quelle est la définition de son intégrabilité et de son intégrale sur** $]0,1]$ **?**
- **Quelle est la condition nécessaire et suffisante sur le réel** s **pour que la fonction** $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ **soit intégrable sur** $]0,1]$ **? Démontrer ce résultat en vous servant de la définition de l'intégrabilité que vous donnez au point précédent.**

  Solution. Voir cours

- **Dans un même repère orthonormé du plan, représenter la fonction** $\frac{1}{x^s}$, $x > 0$ **pour** $s = 1/2, 1, 2$ **et interpréter l'intégrabilité sur** $]0,1]$**.**



On peut interpréter l'intégrabilité de la façon suivante : pour $s = 1/2$, l'aire sous la courbe est finie alors que pour $s = 1$ et $s = 2$, l'aire sous la courbe est infinie.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle** x **appartient à l'intervalle** $[2\pi, 4\pi]$**, résoudre l'équation suivante**

$$\cos(2x) = 1 + \sin x.$$

Solution. L'équation est équivalente à

$$1 - 2\sin^2(x) = 1 + \sin(x) \Leftrightarrow \sin(x)(1 + 2\sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi]$ sont $2\pi,\ 3\pi,\ \frac{19\pi}{6},\ \frac{23\pi}{6}$ et 4π.

(b) Si elles sont définies, simplifier au maximum les expressions suivantes

$$\ln\left(e^{-3}\right) + \operatorname{arctg}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{(-3)^2}, \qquad\qquad e^{i\pi/2}$$

Solution. Comme $\sqrt{(-3)^2} = 3$, en appliquant la propriété relative au logarithme d'une puissance d'un réel positif et en utilisant $\ln e = 1$, on a

$$\ln\left(e^{-3}\right) + \operatorname{arctg}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{(-3)^2} = -3\ln e + \operatorname{arctg}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3 = \operatorname{arctg}^2\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Comme $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),\ x \in \mathbb{R}$, on a $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$.

(c) Déterminer les parties réelle et imaginaire du complexe $\frac{1}{i} - 2i + 1$

Solution. Le complexe donné est égal à $-i - 2i + 1 = 1 - 3i$. Sa partie réelle est donc 1 et sa partie imaginaire -3.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to -\infty} e^{x/(1+x)}.$$

Solution. La fonction $x \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie sur $A = \mathbb{R}_0$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 0 rencontre $A \cap]-\infty, 0[=]-\infty, 0[$, le calcul de la limite en 0^- peut être envisagé.
Par application du théorème des limites des fonctions composées, comme

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg}(y) = -\frac{\pi}{2}^+,$$

la limite demandée vaut $-\frac{\pi}{2}^+$.

La fonction $x \mapsto e^{x/(1+x)}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, ensemble non minoré ; le calcul de la limite en $-\infty$ peut donc être envisagé. Par application du théorème des limites des fonctions composées, comme

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{1+x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 1} e^y = e,$$

la limite demandée vaut e.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_0^1 \ln x\ dx, \qquad \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}dx, \qquad \int_1^3 \frac{x-1}{x+1}dx$$

Solution. La fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$; elle est donc continue sur l'intervalle non fermé borné $]0, 1]$. Comme $\ln x < 0\ \forall x \in]0, 1]$, vérifions l'intégrabilité de cette fonction en 0 par application de la définition. Si on obtient une limite finie, la fonction sera intégrable en 0 donc sur $]0, 1]$ et la valeur de l'intégrale sera l'opposé de la limite obtenue.

Par une intégration par parties, calculons

$$\int_t^1 -\ln x\ dx = -\int_t^1 Dx\ \ln x\ dx = -[x\ln x]_t^1 + \int_t^1 1\ dx = t\ln t + 1 - t.$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 -\ln x\ dx = \lim_{t\to 0^+} (t\ln t + 1 - t) = 1 + \lim_{t\to 0^+} (t\ln t).$$

Pour calculer $\lim_{t\to 0^+} (t\ln t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{t^{-1}}$, on utilise le théorème de l'Hospital, les hypothèses étant vérifiées. En effet, si $V =]0, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$,

1) les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto t^{-1}$ sont dérivables dans V
2) $D(t^{-1}) = -t^{-2} \neq 0 \ \forall t \in V$
3) $\lim\limits_{t \to 0^+} (t^{-1}) = +\infty$
4) $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{t^{-1}}{-t^{-2}} = 0.$

Dès lors, $\lim\limits_{t \to 0^+} (t \ln t) = 0$ et la limite $\lim\limits_{t \to 0^+} \int_t^1 -\ln x \; dx = 1$. Cette limite étant finie, la fonction est intégrable sur $]0,1]$ et l'intégrale demandée vaut -1.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc sur $[2, +\infty[$, ensemble non borné fermé. Pour tout $t > 2$, cette fonction est donc intégrable sur $[2, t]$ et on a

$$\int_2^t \frac{1}{(x-1)^2} \; dx = \left[-\frac{1}{x-1} \right]_2^t = 1 - \frac{1}{t-1}.$$

Dès lors,

$$\lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{1}{(x-1)^2} \; dx = \lim_{t \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{t-1} \right) = 1.$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ est à valeurs positives, la limite précédente donne son intégrabilité et la valeur de son intégrale sur $[2, +\infty[$.

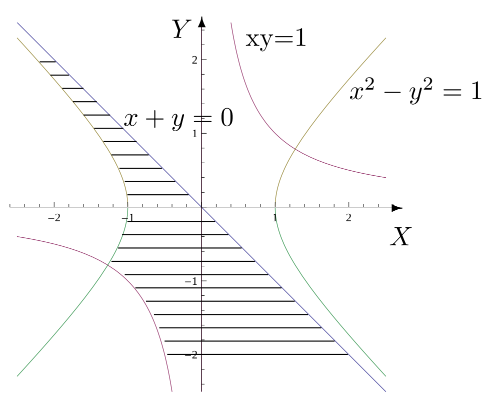
La fonction $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc sur $[1, 3]$, ensemble fermé borné. Dès lors la fonction est intégrable sur cet ensemble et on a

$$\int_1^3 \frac{x-1}{x+1} \; dx = \int_1^3 \frac{x+1-2}{x+1} \; dx = \int_1^3 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) \; dx$$
$$= [x - 2\ln(x+1)]_1^3 = 2 - 2\ln 4 + 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2.$$

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x + y \leq 0 \text{ et } xy \leq 1 \text{ et } x^2 - y^2 \leq 1 \right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **(a) Montrer que la fonction** $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ **vérifie l'équation différentielle**

$$f(x) D^2 f(x) + (Df(x))^2 = 1 \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Solution. D'une part, la fonction donnée est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$D\sqrt{1+x^2} = x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

et

$$D^2\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \text{pour tout} \quad x.$$

Dès lors,

$$f(x)D^2f(x) + (Df(x))^2 = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

et la fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) + f(x) = x^2 + 1$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x) + f(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 1 = z^2 - i^2$ et ses zéros sont $-i$ et i. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \; x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 2 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$, non solution de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax^2 + Bx + C, \; x \in \mathbb{R}$ où $A, \; B$ et C sont des constantes à déterminer. Comme $Df_P(x) = 2Ax + B$ et $D^2f_P(x) = 2A$, on a $2A + Ax^2 + Bx + C = x^2 + 1$ et, par identification des coefficients des polynômes, on obtient $A = 1, \; B = 0$ et $C = -1$.
Ainsi, $f_P(x) = x^2 - 1, \; x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x^2 - 1, \; x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un pharmacien a 25 ml d'une solution qui contient une concentration de glucose à 20 %***. Combien de ml de glucose pur doit-il ajouter pour obtenir une concentration à*** 50 % ***?***
Solution. La solution donnée contient $25 \,.\, 0,2 = 5$ ml de glucose pur. Si on note x le nombre de ml de glucose pur à ajouter, on a l'équation

$$5 + x = 0,5(25 + x) \Leftrightarrow 5 + x = 12,5 + 0,5x \Leftrightarrow 0,5x = 7,5 \Leftrightarrow x = 15.$$

On doit donc ajouter 15 ml de glucose pur à la solution donnée pour obtenir une concentration à 50 %.