Université de Liège

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Corrigé de l'examen de math A du 31 mai 2011

Version 6 juin 2011

Mathématiques générales A
Examen du mardi 31/05/11, 08h30-10h30

Théorie

Question 1.
Enoncer et démontrer la formule du « binôme de Newton ».

Solution. Voir cours.

Question 2.
- **Quelle est la définition de la fonction** arctg **?**
- **Quelle est la forme explicite de la dérivée de la fonction** arctg **? Démontrer ce résultat.**
  Solution. Voir cours
- **Où la fonction** $x \mapsto \text{arctg}\,(\text{tg}\,x)$ **est-elle définie ? (Donner le domaine de définition le plus grand possible)**
  Solution. Le domaine de définition de cette fonction est l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercices

1. **(a) Sachant que l'inconnue réelle** x **appartient à l'intervalle** $[0, 2\pi]$**, résoudre l'équation suivante**

$$\cos(3x)\sin x = \frac{1}{2} + \sin(3x)\cos x.$$

Solution. L'équation est équivalente à

$$\sin(3x)\cos x - \cos(3x)\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x - x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\text{ ou }\; 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \;\text{ ou }\; x = \frac{7\pi}{12} + k\pi,\; k \in \mathbb{Z}.$$

Dès lors, les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont $\frac{7\pi}{12}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{12}$ et $\frac{23\pi}{12}$.

(b) Si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\ln\left(e^{-\pi}\right) + \text{arctg}\left(\text{tg}(\frac{6\pi}{5})\right) + \sqrt{(-\pi)^2}$$

Solution. Comme $\sqrt{(-\pi)^2} = \pi$ et $\text{tg}(\frac{6\pi}{5}) = \text{tg}(\frac{\pi}{5})$, en appliquant la propriété relative au logarithme d'une puissance d'un réel positif et en utilisant $\ln e = 1$, on a

$$\ln\left(e^{-\pi}\right) + \text{arctg}\left(\text{tg}(\frac{6\pi}{5})\right) + \sqrt{(-\pi)^2} = -\pi \ln e + \frac{\pi}{5} + \pi = \frac{\pi}{5}.$$

(c) Déterminer les parties réelle et imaginaire des complexes

$$\frac{1}{i+2} - 2i, \qquad e^i$$

Solution. Le complexe $\frac{1}{i+2} - 2i$ est égal à $\frac{2-i}{5} - 2i = \frac{2-11i}{5}$. Sa partie réelle est donc $\frac{2}{5}$ et sa partie imaginaire $\frac{-11}{5}$.
Comme $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),\; x \in \mathbb{R}$, on a $e^i = \cos(1) + i\sin(1)$. Dès lors, la partie réelle de e^i est $\cos(1)$ et sa partie imaginaire est $\sin(1)$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes**

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \lim_{x\to1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x-1|}.$$

Solution. La fonction $x\mapsto x\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie sur $A=\mathbb{R}_0$, ensemble non majoré ; le calcul de la limite en $+\infty$ peut donc être envisagé.
Par application du théorème des limites des fonctions composées, comme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{y\to0^+}\mathrm{arctg}(y)=0^+,$$

on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0^+$ et on doit lever l'indétermination "$0.\infty$".
Pour cela, appliquons le théorème de l'Hospital après en avoir vérifié les hypothèses.
Considérons $V=]\varepsilon,+\infty[$ avec $\varepsilon>0$ suffisamment grand ainsi que les fonctions $f:x\mapsto\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ et $g:x\mapsto\frac{1}{x}$. Puisque
1) ces deux fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}_0$ donc sur V.
2) $Dg(x)=-1/x^2$ diffère de 0 sur $\mathbb{R}_0$ donc sur V
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{Df(x)}{Dg(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{-x^{-2}}{1+x^{-2}}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^{-2}}=1$
on a

$$\lim_{x\to+\infty}x\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=1.$$

La fonction $x\mapsto\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x-1|}$ est définie sur $A=[-1,1[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre $A\cap]-\infty,1[=[-1,1[$, le calcul de la limite en 1^- peut être envisagé.
Comme on a

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x-1|}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}},$$

la limite demandée vaut $+\infty$.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum**

$$\int_e^{2e}\ln x\;dx, \qquad \int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}dx, \qquad \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

Solution. La fonction $x\mapsto\ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$; elle est donc continue sur l'intervalle fermé borné $[e,2e]$. Dès lors, elle est intégrable sur cet ensemble.

Par une intégration par parties, on a

$$\int_e^{2e}\ln x\;dx=\int_e^{2e}Dx\;\ln x\;dx=[x\ln x]_e^{2e}-\int_e^{2e}1\;dx$$
$$=2e\ln(2e)-e\ln e-(2e-e)=2e(\ln2+\ln e)-2e=2e\ln2.$$

La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^2-1}$ est positive et continue sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ donc sur $[2,+\infty[$, ensemble non borné fermé. Par une décompostion en somme de fractions simples, on a

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}.$$

Pour tout $t>2$, la fonction étant continue sur le fermé borné $[2,t]$ y est intégrable et on a

$$\int_2^t\frac{1}{x^2-1}\;dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]_2^t=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_2^t=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{t-1}{t+1}-\ln\frac{1}{3}\right).$$

Dès lors,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{x^2-1}\ dx = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(\ln\frac{t-1}{t+1}+\ln 3\right) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Comme la limite obtenue est finie et comme la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ est à valeurs positives sur $[2,+\infty[$, la limite précédente donne l'intégrabilité de la fonction et la valeur de son intégrale sur cet ensemble.

La fonction $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ est continue et positive sur $]-1,+\infty[$ donc sur $]-1,1]$, ensemble non fermé borné. Pour tout $t>-1$, cette fonction est donc intégrable sur $[t,1]$ et on a

$$\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = [2\sqrt{x+1}]_t^1 = 2(\sqrt{2}-\sqrt{t+1}).$$

Dès lors,

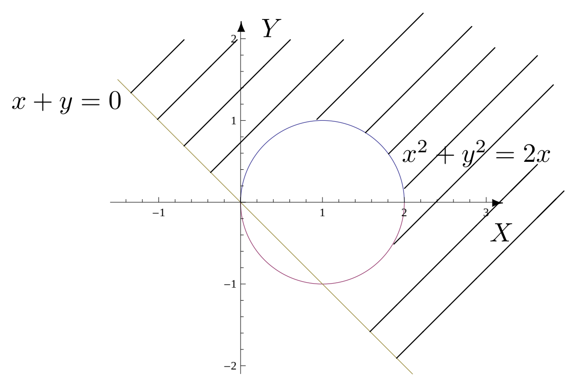
$$\lim_{t\to-1^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{2}.$$

Comme la limite obtenue est finie et comme la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ est à valeurs positives sur $]-1,1]$, la limite précédente donne l'intégrabilité de la fonction et la valeur de son intégrale sur cet ensemble.

4. **On fixe un repère orthonormé du plan. En le hachurant, représenter l'ensemble dont une description analytique est la suivante**

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y\geq 0 \text{ et } x^2+y^2\geq 2x\right\}$$

Solution. Une représentation graphique de cet ensemble est la suivante : il s'agit des points du plan de la partie hachurée, les points des "bords" étant compris dans l'ensemble.



5. **(a) Rechercher le domaine d'infinie dérivabilité de la fonction f donnée explicitement ci-dessous**

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$D^2f(x)-x(Df(x))^2=0$$

Solution. D'une part, la fonction donnée est infiniment dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$Df(x)=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=\frac{2}{1-x^2}$$

et

$$D^2f(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \quad \text{pour tout} \quad x \in]-1,1[.$$

Dès lors,

$$D^2f(x) - x(Df(x))^2 = \frac{4x}{(1-x^2)^2} - \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0$$

et la fonction donnée vérifie bien l'équation différentielle.

(b) Déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction donnée explicitement ci-dessous, l'expression de sa dérivée en tout point du domaine ainsi que la valeur de cette dérivée en $x = \frac{\pi}{6}$.

$$g(x) = \sin(\cos^2 x)$$

Solution. Le domaine de dérivabilité de la fonction donnée est $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction

$$\cos(\cos^2 x)\ .\ 2\cos x\ .\ (-\sin x) = -\sin(2x)\cos(\cos^2 x),\ x \in \mathbb{R}.$$

En $\frac{\pi}{6}$ la dérivée vaut $-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{3}{4}\right)$.

(c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$D^2f(x) + Df(x) = x^2 + 1$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients réels constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $D^2f(x) + Df(x) = 0$; le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + z = z(z+1)$ et ses zéros sont -1 et 0. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$c_1 e^{-x} + c_2,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre, fonction continue sur $\mathbb{R}$, est le produit d'un polynôme de degré 2 par une exponentielle $e^{\alpha x}$ avec $\alpha = 0$, solution simple de l'équation caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx,\ x \in \mathbb{R}$ où $A,\ B$ et C sont des constantes à déterminer. Comme $Df_P(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$ et $D^2f_P(x) = 6Ax + 2B$, on a $6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C = x^2 + 1$ et, par identification des coefficients des polynômes, on obtient $A = 1/3$, $B = -1$ et $C = 3$.
Ainsi, $f_P(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 3x,\ x \in \mathbb{R}$ et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1 e^{-x} + c_2 + \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x,\ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**
Un pharmacien a 25 ml d'une solution qui contient une concentration de glucose à 20 %***. Combien de ml de glucose pur doit-il ajouter pour obtenir une concentration à*** 50 % ***?***
Solution. La solution donnée contient $25\ .\ 0,2 = 5$ ml de glucose pur. Si on note x le nombre de ml de glucose pur à ajouter, on a l'équation

$$5 + x = 0,5(25 + x) \Leftrightarrow 5 + x = 12,5 + 0,5x \Leftrightarrow 0,5x = 7,5 \Leftrightarrow x = 15.$$

On doit donc ajouter 15 ml de glucose pur à la solution donnée pour obtenir une concentration à 50 %.