# *1, 2, 3...Sciences*

*Année académique 2010-2011*

**Mathématiques générales : 1er bachelier** **Test du 15-09-10**

## Correction

$\boxed{\text{QCM}}$ (Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0,25 ; pas de réponse : 0)

Pour chacune des questions suivantes, choisir parmi les différentes affirmations celle qui est correcte.

1. Si on divise par deux la longueur du côté d'un carré, alors
   (a) l'aire de ce carré est divisée par 2
   (b) ♣ le périmètre de ce carré est divisé par 2
   (c) le volume du cube dont les faces sont composées de ce carré est divisé par 2
   (d) il est nécessaire de connaître la taille initiale du côté du carré pour pouvoir répondre à cette question
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
2. Si on achète un article soldé de 30 %, cela signifie que, pour connaître son prix de départ, le prix soldé doit être
   (a) multiplié par 0,3
   (b) multiplié par 0,7
   (c) divisé par 0,3
   (d) ♣ divisé par 0,7
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
3. Un tiers d'un récipient est rempli d'eau. On ajoute alors une quantité d'eau égale aux deux tiers du volume libre restant. Au total, quelle part du volume du récipient a-t-on remplie d'eau ?
   (a) 2/3
   (b) 1
   (c) 2/9
   (d) ♣ 7/9
   (e) aucune des propositions précédentes n'est correcte
4. La force gravitationnelle entre deux objets est donnée par la formule suivante

   $$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

   où $G$ est la constante gravitationnelle, $m_1$ et $m_2$ sont les masses des deux objets et $d$ est la distance qui les sépare.
   Si on remplace l'un des deux objets par un objet trois fois plus lourd, comment la distance $d$ doit-elle être modifiée pour laisser la force gravitationnelle inchangée ?
   (a) Elle doit être divisée par 3
   (b) Elle doit être multipliée par 3
   (c) Elle doit être divisée par 9
   (d) Elle doit être multipliée par 9
   (e) ♣ aucune des propositions précédentes n'est correcte

Techniques de calcul

1. Résoudre (a) $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{12} = \frac{x}{8}$ (b) $x \leq \frac{1}{x}$ (c) $|x-2| > 1$

   ***Solution.***
   (a) On a
   $$\begin{aligned} -\frac{3}{4}x + \frac{1}{12} &= \frac{x}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{12} &= \frac{7x}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{8}{7}.\frac{1}{12} &= x \\ \Leftrightarrow \frac{2}{21} &= x. \end{aligned}$$
   L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = \{\frac{2}{21}\}$.
   (b) Si $x \neq 0$, on a
   $$\begin{aligned} x &\leq \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x} &\leq 0 \end{aligned}$$
   c'est-à-dire $x \leq -1$ ou $x \in ]0;1]$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble $S = ]-\infty;-1] \cup ]0;1]$.
   (c) On a
   $$\begin{aligned} |x-2| > 1 &\Leftrightarrow x-2 > 1 \text{ ou } x-2 < -1 \\ &\Leftrightarrow x > 3 \text{ ou } x < 1. \end{aligned}$$
   L'ensemble des solutions est l'ensemble $S = ]-\infty;1[ \cup ]3;+\infty[$.

2. Résoudre $\sin x = \cos(2x)$ et donner les solutions dans $[\pi, 3\pi]$.

***Solution.*** On a
$$\begin{aligned} \sin x = \cos(2x) &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(2x) \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = 2x + 2k\pi \text{ ou } \frac{\pi}{2} - x = -2x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } -x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
L'ensemble des solutions dans $[\pi;3\pi]$ est alors $S = \{\frac{3\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}\}$.

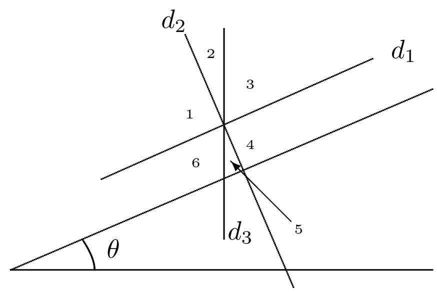
Problème élèmentaire

*Rédiger une solution du problème simple suivant.*
Une citerne parallélipipédique a une base rectangulaire de 1 m sur 2 m. Lors d'un orage, le niveau de son eau s'élève de 1 cm. A combien de litres par $m^2$ cela correspond-il ?

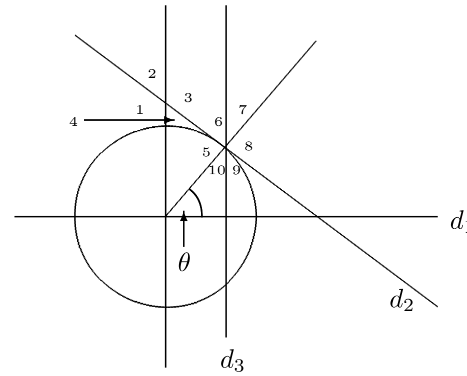
***Solution.*** Lors de l'orage, le volume a augmenté de 0,02 $m^3$, c'est-à-dire 20 $dm^3$. Ceci correspond à une capacité de 20 $\ell$. Comme l'aire de la base de la citerne est égale à 2 $m^2$, on en déduit qu'il a plu 10 $\ell/m^2$.

Représentation graphique

1. (a)




(b)




$d_1$ est parallèle au plan incliné
$d_2$ est perpendiculaire au plan incliné
$d_3$ est perpendiculaire au plan horizontal

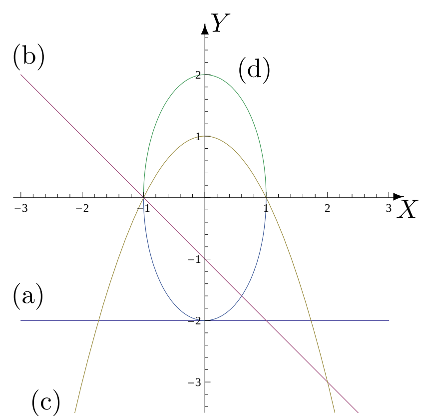
$d_3$ est perpendiculaire à $d_1$
$d_2$ est tangente au cercle

Donner le numéro de tous les angles (s'il y en a) dont la mesure est égale à $\theta$ pour chacune des figures.

**Solution.** Dans la figure (a), les angles dont la mesure est égale à $\theta$ sont numérotés 2 et 5 ; dans la figure (b), ils sont numérotés 2, 4, 6 et 9.

2. Dans un même repère orthonormé, représenter les courbes dont voici les équations en accompagnant le graphique du numéro de l'équation
   (a) $y + 2 = 0$
   (b) $x + y + 1 = 0$
   (c) $x^2 + y - 1 = 0$
   (d) $4x^2 + y^2 = 4$

**Solution.**




Transcodage

1. Exprimer en **français** la propriété ci-dessous (**ATTENTION** : il n'est **pas** question de **se limiter à une lecture de symboles**. Par exemple, on exprime « $a + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ » par « la somme de deux réels » et non « $a$ plus $b$ avec $a, b$ appartenant à $\mathbb{R}$ ») :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \; . \; \sqrt{b}, \;\; a, b \in [0, +\infty[.$$

**Solution.** La racine carrée d'un produit de 2 réels positifs est égale au produit de la racine carrée de chacun de ces réels.

2. Exprimer en **symboles mathématiques** la phrase entre guillemets :
« la fréquence d'un pendule est égale au produit d'une constante strictement positive par la racine carrée du quotient de l'accélération de la pesanteur par la longueur du pendule ».

**_Solution._** Soient $f$ la fréquence et $l$ la longueur d'un pendule. Soient $g$ l'accélération de la pesanteur et $c$ une constante strictement positive. On a

$$f = c\sqrt{\frac{g}{l}}.$$