1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2010-2011

Exercices de mathématique
Liste type numéro 11
Semaines 13 (et 14)

Version 27 novembre 2010 (V1 20/11/09)

Préambule

Cette liste concerne
– les équations différentielles

Les équations différentielles sont utilisées dans de multiples contextes pour la modélisation de phénomènes et le traitement de ces modèles. En voici un exemple.

Soient x et y les tailles de deux organes d'un même animal (considérées comme fonction du temps). Les données empiriques montrent que les taux de croissance spécifiques, à savoir

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{x}D_tx(t) \quad \text{et} \quad \frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt}=\frac{1}{y}D_ty(t)$$

peuvent être considérés comme approximativement proportionnels. Cela signifie qu'il existe une constante non nulle k telle que

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dt}=k\frac{1}{x}\ \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

En considérant que y est fonction de x, en utilisant la dérivation des fonctions de fonctions et en supposant que $\frac{dx}{dt}$ n'est pas nul, on a

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\ \frac{dx}{dt}$$

donc (1) devient

$$\frac{dy}{dx}=k\frac{y}{x} \qquad (2)$$

Cette équation est « à second membre séparé » et aussi « linéaire » ; elle peut être résolue par des méthodes directes (qui sont notamment présentées dans les notes de cours). Sa solution générale s'écrit

$$y=Cx^k$$

pour une certaine constante C (on parle de relation « allométrique »).

Il existe de nombreux types d'équations différentielles. Les méthodes de résolution ne sont pas toujours évidentes ni aisées à manipuler, sauf dans le cas des équations différentielles *linéaires à coeffcients constants.* Il est donc très important d'être capable de les reconnaître.

Tout ceci est abondamment illustré notamment dans les notes, où une attention toute particulière est accordée également à l'évolution des populations (en présence ou non de facteurs limitants).

I. Quelques manipulations

1. L'équation différentielle $(D_ty)^2=6y$ est-elle linéaire ?
2. Montrer que la fonction $g(t)=t^2-2t,\ (t\in\mathbb{R})$ vérifie le système $\left\{\begin{array}{l}(D_ty)^2=4(y+1)\\ y(0)=0\\ y(2)=0\end{array}\right.$
3. Montrer que[1] la fonction $g(t)=\text{tg}\ t+\dfrac{1}{\cos t},\ t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, vérifie l'équation $2\dfrac{dy}{dt}-y^2=1$.

[1]Les dérivées première et seconde de $f(x),\ x\in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx},\ \frac{d^2f}{dx^2}$

II. Equations différentielles, résolutions

1. Résoudre les équations différentielles et les systèmes suivants, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$a)\ Df(x) + 2if(x) = 0$	$b) D^2 f = f$
$c) D^2 f = 0$	$d)\ Df(x) - f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$
$e)\ Df(x) + 2f(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$	$f)\ D^2 f(x) + Df(x) - 2f(x) = xe^x + e^{2x}$
$g)\ 4D^2 f(x) + f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$	$h)\ 4D^2 f(x) + 4Df(x) + f(x) = 1$

2. Dans certaines conditions, la température de surface $y(t)$ d'un objet change au cours du temps selon un « taux » proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note y_0. On obtient ainsi l'équation différentielle

$$Dy(t) = k(y - y_0)$$

où k est une constante strictement négative. Cette équation est appelée « Newton's law of cooling » et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.

Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.

III. Equations différentielles linéaires à coefficients constants, du second ordre, avec conditions initiales

1. Résoudre le système suivant, en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$\begin{cases} 4D^2 f(x) - f(x) = x + 1 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.

$$4D^2 f(x) - Df(x) = x$$

Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1.

IV. Divers

1. Déterminer la valeur de la constante c de telle sorte que la fonction $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation différentielle

$$c\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

2. Soit L la longueur d'un pendule et soit T sa période d'oscillation. Si les oscillations sont petites et si le pendule n'est soumis à aucune force autre que la gravité, alors un modèle liant T et L est l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dL} = \frac{T}{2L}.$$

Montrer que cela implique que la période T est proportionnelle à la racine carrée de la longueur L.

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2010-2011

Bon travail pour cette fin d'année et n'oubliez pas la trigonométrie (entre autre !)

Je rappelle l'un des énoncés du QCM « Evaluation 1, 2, 3...Sciences »... Il y a beaucoup d'autres exemples élémentaires !

Si y désigne un réel de l'intervalle $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, que vaut l'expression suivante ?

$$\cos\left(2y - \frac{\pi}{2}\right)\ \sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2 y}$$

$-2\cos y$, $2\cos y$, $-2\sin y$, $2\sin y$, aucune des réponses précédentes n'est correcte

Problèmes élémentaires précédents (listes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

1. Un missile est lancé sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4.5 km ?
2. Le lait contient environ les 3/20 de son poids de crème et la crème 25 % de son poids de beurre. Combien de kg de beurre obtient-on à partir de 2000 l de lait si la densité du lait est $1,032$?
3. Dans le premier quadrant d'un repère orthonormé d'origine O, on place un triangle OAB, rectangle en A, de telle sorte que B soit sur l'axe des abscisses. Si la distance de A à l'origine vaut 1 et si la distance entre A et B vaut 2, quelles sont les coordonnées cartésiennes de A ?
4. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la procédure suivante.

   Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?
5. Sur une carte à l'échelle $\dfrac{1}{2\ 500}$ la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4cm. A quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?
6. A la météo, on annonce une nuit de pluie et le lendemain, on mesure effectivement sur la terrasse une hauteur de 1mm d'eau par mètre carré. A combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
7. Un laborantin doit préparer une solution de 18 ml qui contient 3% de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10% de glucose et l'autre seulement 1%. Combien de ml de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?
8. Dans un repère orthonormé, on donne l'ellipse $\mathcal{E}$ par son équation cartésienne

   $$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

   Représenter cette ellipse, ainsi que ses foyers. Spécifier précisément (égalité et graphique) la ou les relations entre les dénominateurs intervenant dans le membre de gauche de l'équation et les coordonnées des foyers.

9. Dans un repère orthonormé, on donne une ellipse par son équation cartésienne
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
où a, b sont des nombres réels tels que $0 < b < a$. On définit le point F (foyer) de coordonnées$(c, 0)$, où $c=\sqrt{a^2-b^2}$.
a) Exprimer le carré de la distance entre un point P et F lorsque P parcourt l'ellipse.
b) Déterminer la valeur maximale et la valeur minimale de cette distance en fonction de a et c.
c) On appelle « aphélie » le point de l'ellipse qui correspond à la distance maximale, notée r_a et « périhélie » le point qui correspond à la distance minimale, notée r_p. Exprimer l'excentricité de l'ellipse en fonction des deux distances r_a et r_p.
d) Rechercher les valeurs numériques approximatives de r_a, r_p dans le cas de l'orbite terrestre (en vous documentant dans des documents de référence). En déduire une valeur approximative de e.
10. On se rapporte à un repère orthonormé d'origine notée O, le sol étant symbolisé par l'axe X et la verticale par Y. Dans ce repère, le mouvement d'un projectile lancé de l'origine avec une vitesse initiale de composantes (v_1, v_2) est donnée en fonction du temps par
$$\begin{cases} x(t)=v_1 t \\ y(t)=v_2 t-\frac{g}{2}t^2 \end{cases}$$
où g désigne l'accélération due à la gravité terrestre.
a) Montrer que la trajectoire du projectile est une parabole.
b) Si la norme de la vitesse initiale vaut $20\ m/s$ et si l'angle de tir vaut $60°$, quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile[2] ? Pourquoi ?
c) Quelle est l'expression de la distance horizontale parcourue[3] par le projectile lorsqu'il retombe sur le sol ? Pourquoi ?
d) Représenter graphiquement les divers éléments de ce problème.
e) Quel angle de tir doit-on prendre pour que la distance dont il est question au point c) soit maximale (en prenant une norme de la vitesse fixe) ?
11. Vous faites du shopping et vous avez un coup de coeur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère pour vos économies. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de l'ordre de 30 %. Mais ensuite, ce sera la periode des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30 %. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour débourser le moins possible, vous achetez avant l'augmentation de prix ou vous attendez les soldes ? Pourquoi ?
12. a) Dans une question de physique relative au mouvement des corps, on lit que *Le corps A se déplace le long d'une courbe décrite par*
$$\{(2\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$
Dans un repère orthonormé, représenter cette courbe et donner une interprétation graphique de θ.
b) On se place dans un repère orthonormé du plan. Représenter l'ensemble des points dont la tangente de l'angle polaire est toujours égale à 1 et donner une équation cartésienne de cet ensemble.
13. Deux petits bateaux téléguidés partent du même point sur un lac. Leur vitesse est respectivement égale à 3 et 4 mètres par minute. Si l'un se dirige vers le nord et l'autre vers l'est, combien de temps faut-il attendre pour que la distance entre les deux soit supérieure à 10 mètres ?
14. Une population de bactéries est attaquée par un agent extérieur faisant en sorte qu'à chaque instant, le taux de changement de la population soit proportionnel à celle-ci. Si on suppose que la constante de proportionnalité est égale à -0.028,
- écrire une équation reliant la population et le taux de changement de celle-ci à chaque instant
- que vaut le taux de changement après une minute si la population à ce moment est de 3 millions d'individus ?
15. En combien de temps dix ouvriers construiront-ils un certain mur que quinze ouvriers ont pu élever en douze jours ?

[2](On suppose $g = 10\ m/s^2$.)
[3]la portée

16. Une équipe de 18 ouvriers travaillant à raison de 8 heures par jour ont pavé en 10 jours une rue de cent cinquante mètres. Combien faut-il d'ouvriers travaillant 6 heures par jour pour paver en 15 jours une rue longue de 75 m, rue de même largeur que la précédente ?
17. Françoise a trois fois l'âge que Nicolas avait quand elle avait l'âge actuel de Nicolas. Quand Nicolas aura l'âge de Françoise, ils auront ensemble 112 ans. Quels sont les âges actuels de Nicolas et de Françoise ?
18. Si on compte les arbres d'un jardin par groupes de 8, il en reste 5 et si on les compte par groupes de 7, il en reste 2. Sachant que le nombre de groupes de 7 surpasse de 3 celui des groupes de 8, combien d'arbres y a-t-il dans ce jardin ?
19. Rédiger une démonstration de la propriété suivante, suggérée au cours : *Soit un naturel strictement positif* m. *La fonction polynomiale* $x \mapsto x^m$ *est dérivable en tout réel* x *et sa dérivée a la forme explicite* $mx^{m-1},\ x \in \mathbb{R}$.

    Suggestion, donnée au cours : utiliser le binôme de Newton
20. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir 1.28 mètres cube de glace ?